Jacobi inversion formulae for a trigonal curve $y^3 = x^2 k(x)$

松谷茂樹 (佐世保工業高等専門学校)[*1]
米田二良 (神奈川工科大学)[*2]
Emma Previato (Boston 大学)[*3]

1. 特異曲線と正規化

$\mathbb{C}$ 上定義された代数曲線のアーベル関数を物理現象，幾何学現象に適用することを考える．例えば，このとき非特異な平面曲線 $y^p = x(x-b_0)(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\ell)$ においてもパラメータの取り方により $b_0 \to 0$ となる場合があり，曲線は特異となる．本報告では，$p=3$ として，その際のヤコビの逆公式について報告する [4, 1, 2].

以下では最も簡単で非自明な Weierstrass normal form で $y^3 = f(x)$, $f(x) = x^2(x-b_1)(x-b_2)$ となる曲線を考える．これらは $(3,p,q)$ の場合に一般化できており，報告では一般の場合にも触れる.

ここで対応する可換環 $R = \mathbb{C}[x,y]/(y^3 - f(x))$ を正規化することにより，$\hat{R} = \mathbb{C}[x,y,w]/(y^2 - xw, wy - x(x-b_1)(x-b_2), w^2 - (x-b_1)(x-b_2)y)$ が得られる．つまり

$$X = \{(x,y,w) \mid y^2 = xw, wy = x(x-b_1)(x-b_2), w^2 = (x-b_1)(x-b_2)y\} \cup \{\infty\}$$

を満たす空間曲線を考察することとなる．各分岐点を B_0, B_1, B_2 とする.

曲線の無限遠点での Weierstrass 列は次のような ϕ_i によって得られ，$\mathbb{C}$ ベクトル空間としての分解 $\hat{R} = \oplus_{i=0}\mathbb{C}\phi_i$ を与える．表の数字は無限遠点での局所パラメータによる

wt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ϕ_i	1	-	-	x	y	w	x^2	xy	xw	yw	x^2y	x^2w	x^4	x^3y	x^3w
$\hat{\phi}_i$	-	-	-	-	y	w	-	xy	xw	yw	x^2y	x^2w	y^3	x^3y	x^3w

極の位数による重み wt を示す.

X の種数は $g=2$ であるが $2g-1=3$ が gap に相当しないことで，本曲線は非対称な数値半群を持つ曲線であることが判る．非対称な数値半群を持つ代数曲線の Riemann 定数は半周期とならないため，ヤコビの逆公式を複雑にすることがこと知られている．そこで，それらをシフトすることで明示的なヤコビの逆公式を得ることを目指す.

2. Shift された Riemann 定数と shift された Abel 写像

この系を特徴付けるものとして $\mathbb{C}$ ベクトル空間として $\hat{R}^B := \{h \in R \mid \exists\ell, \text{ such that } (h) - (B_0 + B_1 + B_2) + \ell\infty > 0\}$ を導入する．これは $\hat{R}^B = \oplus_{i=0}\mathbb{C}\hat{\phi}_i$ とする分解を持つ．$\hat{\phi}_i$

This work was supported by KAKENHI (15K04830，16K05187).
2000 Mathematics Subject Classification: 14H55, 14H50, 14K25, 14H40
キーワード：Jacobi inversion formula, space curve, Weierstrass normal form

[*1] e-mail: smatsu@sasebo.ac.jp
web: http://www.sasebo.ac.jp/~smatsu/
[*2] e-mail: komeda@gen.kanagawa-it.ac.jp
[*3] e-mail: ep@bu.edu

は表に提示した．このとき，正則一形式は $\nu_i = \hat{\phi}_{i-1} dx/(3yw)$ $(i = 1, 2)$ とでき，第二種微分も $\hat{R}^B$ で定まる．

また，Abel 写像を $v(P) = \int_\infty^P \nu$ とし，$v(P_1, \ldots, P_k) = \sum_{i=1}^k v(P_i)$ とする．X のホモロジー基底 α_i, β_i による周期積分（第一種完全積分）を ω', ω'' とし，それによる格子を Γ とする．これより，ヤコビ多様体 $\kappa : \mathbb{C}^g \to \mathcal{J} := \mathbb{C}^g/\Gamma$ を得る．また第二種完全積分を η', η'' とする．

Theorem 2.1 [2] Riemann 定数 ξ に対して，shift された Riemann 定数 ξ_s 及び shift された Abel 写像 v_s を, $P_1, \ldots, P_k \in X$ に対して

$$\xi_s = \xi - {\omega'}^{-1} v(B_0), \quad v_s(P_1, \ldots, P_k) = v(P_1, \ldots, P_k) + v(B_0)$$

と定義すると，

$$2\omega' \xi_s \in \Gamma, \quad \Theta = {\omega'}^{-1} v_s(S^{g-1}X) + \xi_s$$

ここで，Θ は θ 因子である．つまり，$\theta({\omega'}^{-1} v_s(P_1, \ldots, P_{g-1}) + \xi_s) = 0$ となる．

この ξ_s の対応する半格子点を $\begin{bmatrix} \delta'' \\ \delta' \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}/2)^{2g}$ と記すと $\mathbb{C}^g$ 上の整関数である σ 関数を

$$\sigma(u) = c \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ {}^t u \eta' {\omega'}^{-1}\ u} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \mathrm{e}^{\left[\pi\sqrt{-1}\left\{\ {}^t(n+\delta''){\omega'}^{-1}\omega''(n+\delta'') + \ {}^t(n+\delta'')({\omega'}^{-1}u + \delta')\right\}\right]}$$

と定義できる．c は適当な非零の定数である．$P_i = (x_i, y_i, w_i) \in X$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して $\hat{\phi}_i \in \hat{R}^B$ により，

$$\psi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) := \begin{vmatrix} \hat{\phi}_0(P_1) & \hat{\phi}_1(P_1) & \cdots & \hat{\phi}_{n-1}(P_1) \\ \hat{\phi}_0(P_2) & \hat{\phi}_1(P_2) & \cdots & \hat{\phi}_{n-1}(P_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\phi}_0(P_n) & \hat{\phi}_1(P_n) & \cdots & \hat{\phi}_{n-1}(P_n) \end{vmatrix}$$

と，$\mu_n(P; P_1, \ldots, P_n) = \psi_{n+1}(P_1, \ldots, P_n, P)/\psi_n(P_1, \ldots, P_n)$ を導入，定義すると，以下のヤコビの逆公式を得る．(これらの公式は $(3, p, q)$ の場合に拡張できる [3]．)

Theorem 2.2 (ヤコビの逆公式) $\wp_{ij}(u) := -\dfrac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \log \sigma(u)$ に対して，

$$\mu_g(P; P_1, \ldots, P_g) = \hat{\phi}_g(P) + \sum_{i=1}^g (-1)^{g-i+1} \wp_{gi}(v_s(P_1, \ldots, P_g)) \hat{\phi}_{i-1}(P).$$

参考文献

[1] J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, *The sigma function for Weierstrass semigroup* $\langle 3, 7, 8 \rangle$ *and* $\langle 6, 13, 14, 15, 16 \rangle$, Int. J. Math., **24** (2013) 1350085.

[2] J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, *The Riemann constant for a non-symmetric Weierstrass semigroup*, arXiv1604.02627v1.

[3] J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, *Relating algebraic and Abelian functions of pointed curves*, 準備中

[4] S. Matsutani and J. Komeda, *Sigma functions for a space curve of type (3, 4, 5)*, J. Geom. Symm. Phys., **30** (2013) 75-91.