数学特論: 2015/10 松谷茂樹

5 アミダくじと行列式

5.1 アミダくじと置換群

群

集合 G と G における演算 $*$ により，$(G,*)$ または簡単に G が群とは，以下を満たすことである。

群の定義 任意の $x,y\in G$ に対して $x*y\in G$

群の定義 任意の $x,y,z\in G$ に対して $(x*y)*z=x*(y*z)\in G$

群の定義 (単位元の存在）任意の x に対して以下を満たす $e\in G$ が唯一つ存在する $x*e=e*x=x$.

群の定義 任意の $x\in G$ に対して以下を満たす元 $y\in G$, $x*y=y*x=e$. y を x^{-1} と記す.

1. 実ベクトル空間の加法性は、正確には加法群というべきもの．加法群とは、群でかつ $u*v=v*u\in G$

隣接互換群隣接互換群の定義

隣接互換群 $\mathfrak{A}_n$ とは D_n を集合 $\{1,2,\dots,n-1,n\}$ に対して，$i\in D_n$ を固定した写像

$$\tau_{(i,i+1)}:D_n\to D_n$$

$$\tau_{(i,i+1)}(j)=\begin{cases} i+1 & \mathrm{if} j=i,\\ i & \mathrm{if} j=i+1,\\ j & \mathrm{otherwise}\end{cases}$$

を様々な i による繰り返しで構成される写像 $\sigma:D_n\to D_n$ の元全体のことである．つまり、$\mathfrak{A}_n:=\{\sigma:D_n\to D_n\}$

上記、$\tau_{(i,i+1)}$ は隣接する 2 つの元の入れ替え以外は変更をしない作用であり、$\mathfrak{A}_n$ は**アミダくじ**で実現できるもの全体である.

例えば図 5-1(a) のアミダくじ $\sigma:D_6\to D_6$ とし

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\ \sigma(1)&\sigma(2)&\sigma(3)&\sigma(4)&\sigma(5)&\sigma(6)\end{pmatrix}$$

と表すと、

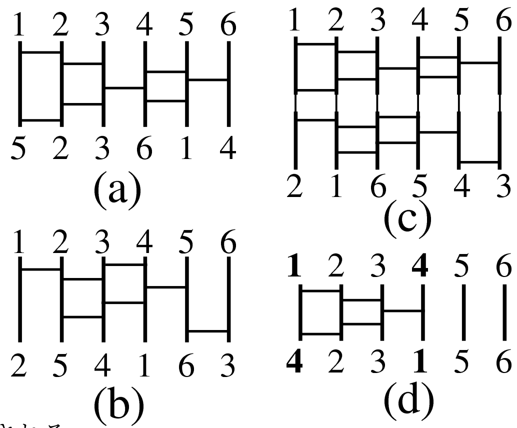
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&2&3&6&1&4\end{pmatrix}$$

に対応する．[1]

[1]但し，対応の仕方は図との対応を判り易くするためにアミダくじの下の数字を $\sigma(i)$ として「i は $\sigma(i)$ から来ている」という対応で，置換群の表示をしている．従って，上から下を置換の写像 τ だと眺めると $\sigma=\tau^{-1}$ の表示していることとなる．図による表示には幾つか慣例があるので気を付ける．

隣接互換群の性質

1. $\mathfrak{A}_n$ の元は D_n 間の全単射な写像であるので，上記の $\mathfrak{S}_n$ の部分集合である.
2. 図 5-1(a), (b) に示す $\mathfrak{A}_n$ の元に対して，$\mathfrak{A}_n$ の合成写像から定まる**積は図 5-1(c)** のように繋げるという操作
3. 逆元は上下逆さまにすること
4. 単位元はすべては縦棒たち



で理解される．

図 5- 1

対称群の定義と性質

対称群とも呼ばれる**置換群** $\mathfrak{S}_n$ とは以下のようなものである.

D_n を集合 $\{1,2,\dots,n-1,n\}$ とし、

D_n の並び順を変更する写像全体を

$$\mathfrak{S}_n=\{\sigma:D_n\to D_n|\sigma\text{は全単射}\}$$

とすると $\mathfrak{S}_n$ は群となり、これを置換群と呼ぶ.

例えば，$n=3$ の場合、ある $\sigma\in\mathfrak{S}_3$ は例えば $\{1,2,3\}\to\{3,2,1\}$ とする。この場合 $\sigma(1)=3,\sigma(2)=2,\sigma(3)=1$ となっており、

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

1. 積は写像の合成.
2. 単位元は恒等写像 $\sigma(i)=i$
3. 逆元は逆写像

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の例

1. $\mathfrak{S}_1 = \{\sigma : \{1\} \to \{1\}\} = \{\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$
2. $\mathfrak{S}_2 = \{\sigma : \{1,2\} \to \{1,2\} \mid \text{全単射}\}$
   $= \left\{\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
3. $\mathfrak{S}_3 = \{\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \mid \text{全単射}\}$
   $= \left\{\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\right.$
   $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$
   $\left.\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$
4. $\mathfrak{S}_4 = \{\sigma : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} \mid \text{全単射}\}$
   $= \left\{\ \sigma_0 = \binom{1234}{1234}, \sigma_1 = \binom{1234}{1243}, \sigma_2 = \binom{1234}{1432},\right.$
   $\sigma_3 = \binom{1234}{1324}, \sigma_4 = \binom{1234}{4231}, \sigma_5 = \binom{1234}{3214},$
   $\sigma_6 = \binom{1234}{2134}, \sigma_7 = \binom{1234}{1342}, \sigma_8 = \binom{1234}{1423},$
   $\sigma_9 = \binom{1234}{3241}, \sigma_{10} = \binom{1234}{4213}, \sigma_{11} = \binom{1234}{2431},$
   $\sigma_{12} = \binom{1234}{4132}, \sigma_{13} = \binom{1234}{2314}, \sigma_{14} = \binom{1234}{3124},$
   $\sigma_{15} = \binom{1234}{2341}, \sigma_{16} = \binom{1234}{2413}, \sigma_{17} = \binom{1234}{2143},$
   $\sigma_{18} = \binom{1234}{3412}, \sigma_{19} = \binom{1234}{3142}, \sigma_{20} = \binom{1234}{3421},$
   $\left.\sigma_{21} = \binom{1234}{4123}, \sigma_{22} = \binom{1234}{4321}, \sigma_{23} = \binom{1234}{4312}\right\}$

隣接互換群の性質

補題 5.1 任意の互換は $\mathfrak{A}_n$ の元で定まる.

命題 5.2 任意の $\mathfrak{S}_n$ の元は $\mathfrak{A}_n$ の元で定まる.

隣接互換群の例 1

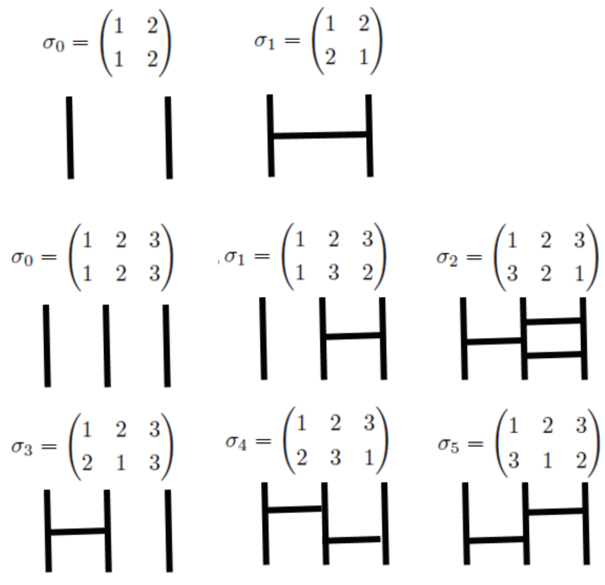
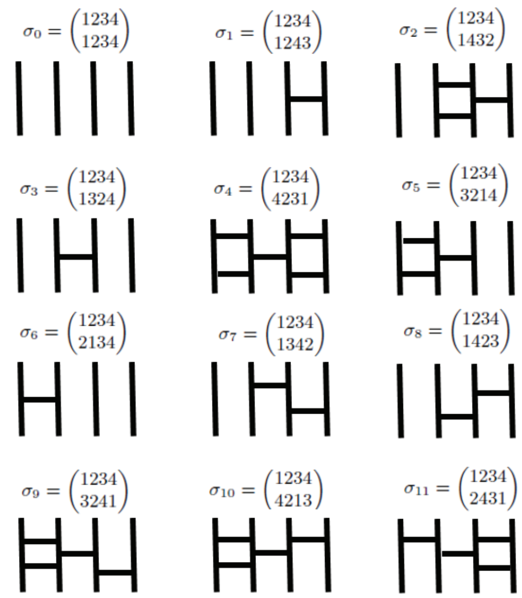


図 5-2

隣接互換群の例 2-1



隣接互換群の例 2-2

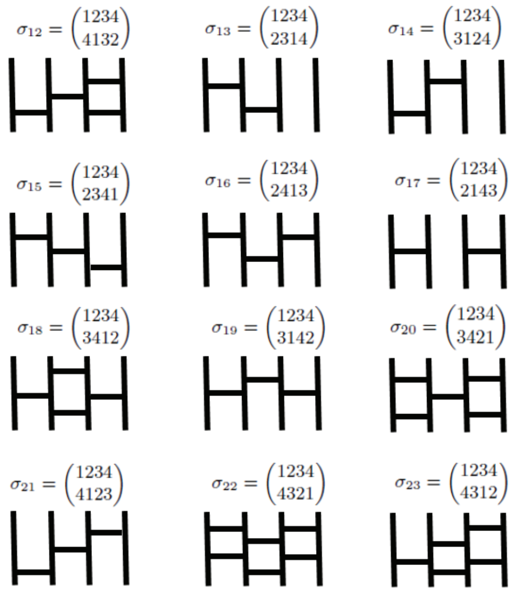


図 5-3

符号関数の定義

$\mathfrak{S}_n$ の元 σ に対して，$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_\ell$, ($\tau_i = (s_i, s_i+1)$, $s_i \in \{1, \dots, n-1\}$) と書けるとき，符号関数 $\epsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ を以下で定義する：

$$\epsilon(\sigma) := (-1)^\ell.$$

符号関数の性質

1. アミダくじには $(1,2)(3,4) = (3,4)(5,6)(6,5)(1,2)$ 等同じ置換を与える異なる表現があり，非自明なことであるが，それらに対して ϵ が同じ値を与える．
2. $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\epsilon(\sigma \circ \tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau), \quad \epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$$

符号関数の例

1. $\mathfrak{S}_1$: $\epsilon(\sigma_0) = 1$.
2. $\mathfrak{S}_2$: $\epsilon(\sigma_0) = 1$, $\epsilon(\sigma_1) = -1$
3. $\mathfrak{S}_3$: $\epsilon(\sigma_0) = \epsilon(\sigma_4) = \epsilon(\sigma_5) = 1$, $\epsilon(\sigma_1) = \epsilon(\sigma_2) = \epsilon(\sigma_3) = -1$
4. $\mathfrak{S}_3$: $\epsilon(\sigma_0) = \epsilon(\sigma_7) = \epsilon(\sigma_8) = \epsilon(\sigma_9) = \epsilon(\sigma_{10}) = \epsilon(\sigma_{11}) = \epsilon(\sigma_{12}) = \epsilon(\sigma_{13}) = \epsilon(\sigma_{14}) = \epsilon(\sigma_{17}) = \epsilon(\sigma_{18}) = \epsilon(\sigma_{22}) = 1$,

   $\epsilon(\sigma_1) = \epsilon(\sigma_2) = \epsilon(\sigma_3) = \epsilon(\sigma_4) = \epsilon(\sigma_5) = \epsilon(\sigma_6) = \epsilon(\sigma_{15}) = \epsilon(\sigma_{16}) = \epsilon(\sigma_{19}) = \epsilon(\sigma_{20}) = \epsilon(\sigma_{21}) = \epsilon(\sigma_{23}) = -1$

5.2 準備：

行列の表現方法

1. 正方行列 $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ の元 $A := (a_{i,j}) \equiv (a_{ij})$,
$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
2. $A \equiv (a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$
3. $a_{\bullet j} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.
4. クロネッカーのデルタ
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}.$$
5. 単位行列 $I_n := (\delta_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$

   I_n は $(I_n)^2 = I_n$.
6. 転置 $A := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ に対して転置とは $A^t := (a_{ji}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ とする

   例えば $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ です.

5.3 行列式の定義

行列式の定義

$\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ の元 $A := (a_{ij})$ に対して，以下を A の行列式とする：

$$\det A := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

行列式の例

$\mathfrak{S}_2=\{\sigma_1,\sigma_2\}$ を利用して、

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{2}\epsilon(\sigma_i)a_{1\sigma_i(1)}a_{2\sigma_i(2)}$$
$$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

$\mathfrak{S}_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_6\}$ を利用して、

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{2}\epsilon(\sigma_i)a_{1\sigma_i(1)}a_{2\sigma_i(2)}a_{3\sigma_i(3)}$$
$$\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}\\ =\ &+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}\\ &-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}.\end{aligned}$$

行列式の例 **2**

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}$$
$$=\sum_{i=1}^{2}\epsilon(\sigma_i)a_{1\sigma_i(1)}a_{2\sigma_i(2)}a_{3\sigma_i(3)}a_{4\sigma_i(4)}$$
$$\begin{aligned}&=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{11}a_{24}a_{43}a_{42}\\ &-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{13}a_{22}a_{33}a_{41}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}\\ &-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}\\ &+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}\\ &+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}+a_{12}a_{13}a_{31}a_{44}+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}\\ &-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\\ &+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}\\ &-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}-a_{14}a_{22}a_{31}a_{42}\end{aligned}$$

5.4 行列式の性質

行列式の性質 1

命題 5.3 $A=(a_{ij})\in\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ に対して $F(A)\equiv F(a_{\bullet 1},\dots,a_{\bullet n}):=\det(a_{\bullet 1},\dots,a_{\bullet n})$ とした際に次の *4* つの事実が成り立つ：

1. $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ に対して $F(c_1a_{\bullet 1},\dots,c_na_{\bullet n})=c_1\cdots c_nF(a_{\bullet 1},\dots,a_{\bullet n})$.

2. 任意の j について $F(a_{\bullet 1},\dots,a_{\bullet j}+a'_{\bullet j},\dots,a_{\bullet n})=F(a_{\bullet 1},\dots,a_{\bullet j},\dots,a_{\bullet n})+F(a_{\bullet 1},\dots,a_{\bullet j},\dots,a_{\bullet n})$.

3. $\tau\in\mathfrak{S}_n$ に対して，$F(a_{\bullet\tau(1)},a_{\bullet\tau(2)},\dots,a_{\bullet\tau(n)})=\epsilon(\tau)F(a_{\bullet 1},a_{\bullet 2},\dots,a_{\bullet n})$.

4. $F(I_n)=1$.

証明：(1),(2) は自明．(3) が交代性を意味する．$F(a_{\bullet\tau(1)},\dots,a_{\bullet\tau(n)})$ は

$$\begin{aligned}&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\epsilon(\sigma)a_{1\sigma\tau(1)}\cdots a_{n,\sigma\tau(n)}\\ &=\epsilon(\tau)\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\epsilon(\sigma')a_{1\sigma'(1)}\cdots a_{n,\sigma'(n)}.\end{aligned}$$

ここで，$\epsilon(\tau)\epsilon(\tau\circ\sigma)=\epsilon(\sigma)$ を利用する．■

行列式の性質 2

逆に行列式は命題 **5.3** の性質 **1-4(1,2** は多重線形性，**3** は交代性，**4** は規格化) をもつものとして完全に特徴付けられます

行列式の性質 **3**：行列とその転置

命題 5.4 $\det A=\det A^t$.

証明：

$$\begin{aligned}\det A^t&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\epsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\\ &=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\epsilon(\sigma)a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}.\end{aligned}$$

$\epsilon(\sigma)=\epsilon(\sigma^{-1})$ より定まります．■

行列式の性質 4

命題 5.5 *1.* $\det(a_{\bullet 1},\dots,0,\dots,a_{\bullet n})=0$.

2. $\det(a_{\bullet 1},\dots,a_{\bullet i},\dots,a_{\bullet i},\dots,a_{\bullet n})=0$.

3. $\det(a_{\bullet 1},\dots,a_{\bullet i},\dots,a_{\bullet j}+ca_{\bullet i},\dots,a_{\bullet n})$
$=\det(a_{\bullet 1},\dots,a_{\bullet i},\dots,a_{\bullet j},\dots,a_{\bullet n})$.

Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$ となる．

証明は以下の通り、左辺を A と記す．

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & (x_4 - x_1) \\ x_1^2 & (x_2^2 - x_1^2) & (x_3^2 - x_1^2) & (x_4^2 - x_1^2) \\ x_1^3 & (x_3^3 - x_1^3) & (x_3^3 - x_1^3) & (x_4^3 - x_1^3) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & (x_2 + x_1) & (x_3 + x_1) & (x_4 + x_1) \\ x_1^3 & (x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) & (x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2) & (x_4^2 + x_4x_1 + x_1^2) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (x_2 + x_1) & (x_3 - x_2) & (x_4 - x_2) \\ (x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) & x_3^2 - x_2^2 + x_1(x_3 - x_2) & x_4^2 - x_2^2 + x_1(x_4 - x_2) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_3 + x_2 + x_1 & x_4 + x_2 + x_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 + x_2 + x_1 - (x_3 + x_2 + x_1))$$

$$= \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

行列式の性質５：積の保存

命題 5.6 $A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ に対して

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

これにより，行列式は積を保存する．

証明：$C = AB$ とし，$C = (c_{ij})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とすると，5.2 節の記法を利用すること

$$(c_{\bullet 1}, \ldots, c_{\bullet n}) = (\sum_{\ell} a_{\bullet \ell} b_{\ell 1}, \ldots, \sum_{\ell} a_{\bullet \ell} b_{\ell n})$$

となります．多重線型性を利用すると $\det C$ は

$$= \sum_{\ell_1, \ldots, \ell_n} b_{\ell_1 1} \cdots b_{\ell_n n} \det(a_{\bullet \ell_1}, \ldots, a_{\bullet \ell_n})$$

$$= \sum_{\ell_1, \ldots, \ell_n} b_{\ell_1 1} \cdots b_{\ell_n n} \epsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \ell_1 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \det(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n})$$

となり，証明される．■

5.5 余因子

余因子

$A := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ に対して $A^{(i,j)}$ を A の内 i 行 j 列を除いたものとします．例えば $n = 5$ では

$$A^{(2,3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

となるものです．このとき，

$$a^{(i,j)} := (-1)^{i+j} \det A^{(i,j)}$$

とする．これを余因子と呼ぶ．

ラプラス展開、余因子展開

補題 5.7 任意の i, j に対して，次が成り立つ：

$$\sum_k a^{(k,i)} a_{kj} = \delta_{ij} \det A.$$

ラプラス展開、余因子展開の例

$\mathfrak{S}_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ を利用して、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \det(a_{22}) - a_{12} \det(a_{21})$$

$\mathfrak{S}_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6\}$ を利用して、

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$+ a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

ラプラス展開、余因子展開の例

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$
$$- a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$
$$+ a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$$
$$- a_{14}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

証明：“ˇ” はその項を除くという操作とし，左辺が

$$\det(a_{\bullet 1}, \dots, \check{a}_{\bullet i}, a_{\bullet j}, \dots a_{\bullet n})$$

となる事から証明されます．■

5.6 逆行列

$A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ に対して $BA = AB = I_n$ となる $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ を**逆行列**と呼び，B を A^{-1} と記す．積の逆元である．

（ケイリー (1821-1895) はシルベスターの 1850 年の論文を基に行列の理論を構築 (1858 年) し、その過程でこの公式を発見 [2].）

逆行列の公式

ラプラス展開、余因子展開の式より $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ で $\det A \neq 0$ とすると

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(a^{(j,i)}\right)$$

一般線形群

$\det A$ **がゼロか否かにより逆行列の存在の有無が決まる**．

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n) \mid \det A \neq 0\}$$

とすると $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ は $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ の中で積の逆元を持つものの全体です．$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ は積について群をなし，**一般線型群**と呼ぶ.

5.7 外積

n 次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間 V に対して $\wedge$ 積 (**ウェッジ積**) と呼ぶものを導入できる．

ここでは 3 次元に限る。

ε

ε として次のようなものを用意する

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312}$$
$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$$
$$\varepsilon_{ijk} = 0, \quad (ijk) = 123, 231, 312, 132, 321, 213 \text{ 以外}$$

外積

この時

$$(u \times v)_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} u_j v_k$$

と定義する．これは

$$(u \times v)_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$$
$$(u \times v)_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3$$
$$(u \times v)_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

6 リー群とリー環

6.1

一般線形群

n 次元実ベクトル空間に対して

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n) \mid \det A \neq 0\}$$

を一般線形群という。

特殊線型変換群

$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

ユニタリー群：

$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1}\}$.

$\mathrm{U}(n)$ はエルミート内積 $(,)_H$ を保存します．つまり，$u, v \in \mathbb{C}^n$，$A \in \mathrm{U}(n)$ に対して，$(u, v)_H = (Au, Av)_H$ となります.

特殊ユニタリー群：

$\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$.

直交変換群：

$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\}$.

特殊直交変換群：

$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}$.

6.2 指数関数表示

指数関数表示

行列 $U \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ に関して，

$$\mathrm{e}^U = I_n + \frac{1}{1!}U + \frac{1}{2!}U^2 + \cdots \equiv \sum_{j=0} \frac{1}{j!}U^j$$

と定義する

6.3 SO(2)

直交変換群 SO(n) の構成方法について記します．

SO(2)：

2 次元直交変換群 SO(2) の元はパラメータ $\theta \in \mathbb{R}$ により，

$$G_\theta^{\mathrm{SO}(2)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。

SO(2) の指数表示

$G_\theta^{\mathrm{SO}(2)} \in \mathrm{SO}(2)$ は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp\left(\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

と書ける。

この等号は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を基にする。つまり、

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}\theta^\ell \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!}(\theta)^{2\ell} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^\ell \\
&+ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}(\theta)^{2\ell+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2\ell+1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで

$$\cos\theta = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!}(\theta)^{2\ell}$$

$$\sin\theta = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}(\theta)^{2\ell+1}$$

と $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を利用している。

SO(2) の指数表示から帰結

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

SO(2) と 2 次元空間の回転

2 次元のデカルト座標の回転により正規直交基底を正規直交基底に変換する

$$G_\theta^{\mathrm{SO}(2)}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\cos\theta - u_2\sin\theta \\ u_1\sin\theta + u_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

となり，$(u, v) = (G_\theta^{\mathrm{SO}(2)}u, G_\theta^{\mathrm{SO}(2)}v)$ となる。

6.4 SO(3) のオイラー表示

SO(3) のオイラー表示

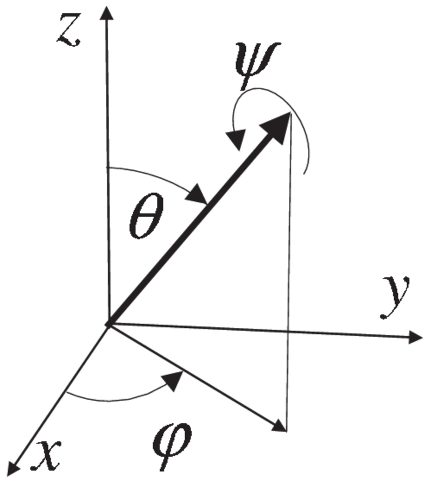
SO(3)：SO(3) の任意の元 G に対して，$G = G^{\mathrm{SO}(3)}_{\psi,\theta,\varphi}$ となる 3 つのパラメータ θ，φ，$\psi \in \mathbb{R}$ が存在して，$G^{\mathrm{SO}(3)}_{\psi,\theta,\varphi} := G^{\mathrm{SO}(3)}_{x-y,\psi} G^{\mathrm{SO}(3)}_{z-x,\theta} G^{\mathrm{SO}(3)}_{x-y,\varphi}$,

$$G^{\mathrm{SO}(3)}_{x-y,\varphi} := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$G^{\mathrm{SO}(3)}_{z-x,\theta} := \begin{pmatrix} \cos\theta & & \sin\theta \\ & 1 & \\ -\sin\theta & & \cos\theta \end{pmatrix},$$

と表現できる．

図のように SO(3) の元は 3 軸での SO(2) の回転の順繰りの操作で表現されるこれを**オイラー表現**と呼ぶ．



オイラー表現

これはオイラー (1707-1783) がコマの運動を研究する際に見つけたもの．但し，$G^{\mathrm{SO}(3)}_{y-z,\phi} := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\phi & -\sin\phi \\ & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ として，$G^{\mathrm{SO}(3)}_{y-z,\psi'} G^{\mathrm{SO}(3)}_{z-x,\theta} G^{\mathrm{SO}(3)}_{x-y,\varphi}$ としても SO(3) の任意の元を表現できます．

SO(3) の指数表示

$G^{\mathrm{SO}(3)}_{x-y,\varphi} = \mathrm{e}^{\varphi L_1}$, $G^{\mathrm{SO}(3)}_{y-z,\phi} = \mathrm{e}^{\phi L_2}$, $G^{\mathrm{SO}(3)}_{z-x,\theta} = \mathrm{e}^{\theta L_3}$,

但し，$L_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$L_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

SU(2) の標準表示

SU(2)：SU(2) の元は $G^{\mathrm{SU}(2)}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ となります．

但し $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i$，$\beta = \beta_1 + \beta_2 i$ は $\mathbb{C}$ の元で，$\det G^{\mathrm{SU}(2)}_{\alpha,\beta} = 1$ の条件から $\bar{\alpha}\alpha + \bar{\beta}\beta = 1$ となります．つまり，$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$

SU(2) の指数表示

$G^{\mathrm{SU}(2)}_{\alpha,\beta} = \mathrm{e}^{\psi(\xi_1 J_1 + \xi_2 J_2 + \xi_3 J_3)}$, 但し，$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$, $J_a := \frac{i}{2}\sigma_a, \quad (a = 1, 2, 3)$

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7 シューアの補題と指数表示

シューアの補題

$A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ は、適当な上三角行列 $T \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ が存在し，A と T とが相似となる．但し，T が上三角行列とは $T = (t_{ij})$ で $t_{ij} = 0\ (i > j)$ のことである．

また，行列 $B \in \mathrm{Mat}(r, \mathbb{C})$ が $B^r = 0$ と $(s < r)$ で $B^s \neq 0$ を満たすならば，B と相似となり $s_{ij} = 0\ (i \geq j)$ とする $S = (s_{ij})$ が存在する．

証明　定理は $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ の n についての帰納法で証明されます．$\lambda_a \in \mathbb{C}$ に対して $Au = \lambda_a u$ となる $u (\neq 0)$ を固有値 λ_a を持つ**固有ベクトル**と呼びます．右辺を左辺に移行することで $(A - \lambda_a I)u = 0$ が成立するための条件が特性多項式 $f_A(\lambda) = 0$ です．λ_a はその根です．$n = 1$ のとき (a_{11}) は三角行列でもあり定理は成り立ちます．A の固有値は重複も含め n 個存在します．その内 A の λ_1 を持つ固有ベクトル v_1 とします．$(u, v)_H := u^* v$ とする内積による $u_1 := v_1/|v_1|$ を含む正規直交基底 $\{u_a\}$ 対して $P_n := (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ とすると $\det P_n \neq 0$ と $P^{-1} = P^*$ が言えます．この時，$P_n^{-1} A P_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$ と書けます．A_{n-1} は $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n-1)$ の元であり帰納法の仮定より三角化可能な P_{n-1} が存在します．$P := P_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{pmatrix}$ により定理が証明されます．　■

物理などで重要な A がエルミート行列（$A = A^*$）である場合は，A は対角行列に相似となる．．エルミート行列の場合は固有値 λ_i は実数で，各固有ベクトル u_i は $(u_i, Au_j)_H = (Au_i, u_j)_H$ より $(\lambda_i - \lambda_j)(u_i, u_j)_H = 0$ となり互いに直交していることが判る．固有値が正の場合，A は**正定値エルミート行列**と呼ばれる．

7.1 跡 (トレース：せき)、行列式と指数表示

行列式に対応して，跡を定義する．

跡 (トレース：せき) の定義

$A := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ に対して，跡を $\mathrm{tr}A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ と定義する．

シューアの三角化定理によりシューアの標準形としての U や上三角行列 T の存在が保証されるが，特に、よい性質の行列 $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ に関しては適当な行列 $U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ と対角行列 $D \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ によって

$$A = U^{-1}DU,\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表される．

以下，この場合を考察する．

跡と行列式の性質 I

$\det A = \det D$, $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}D$ となる．つまり

$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

前者は行列式は行列 A と B とに対して $\det AB = \det A \det B$ となることより

$\det A = \det U^{-1}DU = \det U^{-1} \det D \det U = \det D \det U^{-1}U = \det D \det I_n = \det D$ より導かれる．

また、跡は $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$ となる．（なぜならば $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ に対して，$\mathrm{tr}AB = \sum_i \sum_j (a_{ij}b_{ji}) = \sum_j \sum_i (b_{ji}a_{ij})$）

これより $\mathrm{tr}(U^{-1}D)U = \mathrm{tr}UU^{-1}D = \mathrm{tr}D$.

跡と行列式の性質 II

$A = U^{-1}DU$ となる行列に対して，

$\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$

$A = U^{-1}DU$ のとき，$A^2 = (U^{-1}DU)(U^{-1}DU) = U^{-1}D^2U$ となり，$A^\ell = U^{-1}D^\ell U$ となる．よって，

$(U^{-1}\mathrm{e}^D U) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{-1}\frac{1}{n!}D^n U = \mathrm{e}^A$ となる．ここで e^D は

$$\mathrm{e}^D = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}D^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \begin{pmatrix} \lambda_1^\ell & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^\ell & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^\ell \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda_1^\ell/\ell! & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda_2^\ell/\ell! & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda_n^\ell/\ell! \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$ となる．

また，性質 I より $\det \mathrm{e}^A = \det(U^{-1}\mathrm{e}^D U)$.

従って $\det(\mathrm{e}^A) = \det(U^{-1}\mathrm{e}^D U) = \det \mathrm{e}^D = \prod_i^n \mathrm{e}^{\lambda_i} = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$.

他方，$\mathrm{e}^{\mathrm{tr}A} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}D} = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$ となり

$\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$ が証明された。