数学特論：常微分方程式の数値解法　松谷茂樹

2017.6

常微分方程式

常微分方程式とは，$(n+2)$ 変数の関数

$$F(a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1})$$

（例えば，$n=2$ のとき $3a_3^3 + 2a_2 + \mathrm{e}^{\sin(a_1)} + \cos(\log a_0)$）が与えられた際に，実数の区間 $[0,1)$ 上の変数 t と，x を t について n 回微分可能関数として，

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, \frac{dx^n}{dt^n}) = 0$$

とするものである．
$t=0$ での値（初期値）を $x(0)$, $\frac{dx}{dt}(0)$, $\frac{d^2x}{dt^2}(0)$, $\cdots$, $\frac{dx^n}{dt^n}(0)$ として与えた際にこの方程式を満たす $x(t)$ を t の関数として決定することを，常微分方程式を解くという．

オイラー法

$n=1$ の

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$$

の場合を考える．$f(a_0, a_1)$ は与えられているとして，固定する．
微分は

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon}$$

と定義されるので，上記の式を

$$\frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} = f(t, x(t))$$

と近似する．これにより

$$x(t+\varepsilon) = x(t) + \varepsilon f(t, x(t))$$

とみなすことができる．
これにより $t_n := t_0 + n\varepsilon$, $x_n = x(t_0 + n\varepsilon)$, $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ とすると、

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \varepsilon f(t_0, x_0) \\ x_2 &= x_1 + \varepsilon f(t_1, x_1) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + \varepsilon f(t_{n-1}, x_{n-1}) \end{aligned}$$

として近似的に時間発展を決定できる．これをオイラー法と呼ぶ．

常微分方程式の解析解 I

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

を考える（初期値 $x(t=0) = x_0$）：

$$\frac{dx}{f(x)} = dt$$

より

$$\int_0^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)}$$

として積分を実行し，$x = x(t)$ として解く．

常微分方程式の解析解（例）

$f(x) = \dfrac{1}{2x-2}$ のとき（初期値 $x(t=0) = x_0 > 1$），つまり，$\dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{1}{2x-2}$ のとき上の積分は

$$t = \int_{x_0}^x (2x-2)dx = x^2 - 2x - (x_0^2 - 2x_0)$$

となり，

$$x^2 - 2x + 1 - (x_0^2 - 2x_0 + 1) - t = 0$$

より

$$x(t) = 1 \pm \sqrt{(x_0-1)^2 + t}$$

となる.$x_0 > 1$ より

$$x(t) = 1 + \sqrt{(x_0-1)^2 + t}$$

常微分方程式の解析解（例）

$f(x) = ax$ のとき（初期値 $x(t=0) = x_0$, $a \neq 0$），つまり，$\dfrac{dx(t)}{dt} = ax(t)$ のとき上の積分は

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{ax} = \frac{1}{a}\left[\log(x)\right]_{x_0}^x = \frac{1}{a}\log\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

となり，$x(t) = x_0\mathrm{e}^{at}$ となる．

オイラー法の例 $f(x) = ax$ のとき

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \varepsilon(ax_0) \\ x_2 &= x_1 + \varepsilon(ax_1) \\ &= x_0 + \varepsilon(ax_0) + \varepsilon(a(x_0 + \varepsilon(ax_0))) \\ &= x_0(1 + 2a\varepsilon + a^2\varepsilon^2) = x_0(1+a\varepsilon)^2 \\ x_3 &= x_2 + \varepsilon(ax_2) \\ &= x_0(1+a\varepsilon)^2 + \varepsilon a(x_0(1+a\varepsilon)^2) \\ &= x_0(1+a\varepsilon)^3 \\ &\vdots \\ x_n &= x_0(1+a\varepsilon)^n \end{aligned}$$

$$\mathrm{e} = \lim_{m\to\infty}(1 + \frac{1}{m})^m$$

より，極限により解析解を復元していることが判る。
実際 $\varepsilon = t/n$ とすると以下のようになる。

$$x(t) := \lim_{n\to\infty} x_0 \left(1 + a\frac{t}{n}\right)^n = x_0 \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + a\frac{t}{n}\right)^{n/at}\right)^{at} = x_0\mathrm{e}^{at}$$

$$x(t) := \lim_{n\to\infty} x_0 \sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)!r!}\left(\frac{at}{n}\right)^r = \lim_{n\to\infty} x_0 \sum_{r=0}^n \frac{n^r(n-r)!}{(n-r)!r!}\left(\frac{at}{n}\right)^r$$

$$x(t) = x_0\mathrm{e}^{at} = \sum_{r=0}^\infty \frac{1}{r!}(at)^r$$

常微分方程式の解析解 II

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))/g(t)$$

を考える：

$$\frac{dx}{f(x)} = \frac{dt}{g(t)}$$

より

$$\int_0^t \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)}$$

として積分を実行し，$x = x(t)$ として解く．

常微分方程式の解析解（例）

$f(t,x) = x/2t$ のとき（初期値 $x(t = t_0) = x_0,\ a \neq 0$），つまり $\dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{x}{2t}$ のとき，上の積分は

$$\int_{t_0}^t \frac{dt}{2t} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\log t/t_0 = \log x/x_0$$

となり，

$$x = x_0(t/t_0)^{1/2}$$

オイラー法の例

$f(t,x) = x/2t$ のときのオイラー法は

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \varepsilon(x_0/2t_0)\\
x_2 &= x_1 + \varepsilon(x_1/2t_1)\\
&= x_0(1+\varepsilon(1/2t_0)) + \varepsilon(x_0+\varepsilon(x_0/2t_0))/2(t_0+\varepsilon))\\
&= x_0\left(1+\varepsilon\left(\frac{1}{2t_0}+\frac{1}{2(t_0+\varepsilon)}\right)+\varepsilon^2\frac{1}{2t_0}\frac{1}{2(t_0+\varepsilon)}\right)\\
&= x_0\left(1+\varepsilon\frac{1}{2t_0}\right)\left(1+\varepsilon\frac{1}{2(t_0+\varepsilon)}\right)\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

課題９

オイラーの法について、アルゴリズムをまとめた後、以下の方程式を解くプログラムを作成し、解を求め、解析解との差を報告せよ．但し，初期値は適当に定めよ．

問題 1 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}x$　　問題 2 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{2t}$

ニュートン方程式の解法

$n = 2$ の

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(x(t))$$

の場合を考える．$f(a)$ は与えられているとして，固定する．
これを

$$\begin{pmatrix} \frac{dv(t)}{dt} \\ \frac{dx(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

と考えれば、$n = 1$ の場合に帰着できる．

オイラー法によるニュートン方程式の解

上記の見方に従って、微分

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon}$$

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{v(t+\varepsilon)-v(t)}{\varepsilon}$$

と定義されるので，上記の式を

$$\begin{pmatrix} \frac{v(t+\varepsilon)-v(t)}{\varepsilon} \\ \frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

と近似する．これにより

$$\begin{aligned} v(t+\varepsilon) &= v(t) + \varepsilon f(x(t)),\\ x(t+\varepsilon) &= x(t) + \varepsilon v(t), \end{aligned}$$

とみなすことができる．よって，$x(t_0+n\varepsilon) = x_n\ (n = 0,1,2,3,\cdots)$，$v(t_0+n\varepsilon) = v_n\ (n = 0,1,2,3,\cdots)$ とするとき，

$$\begin{aligned}
v_1 &= v_0 + \varepsilon f(x_0), & x_1 &= x_0 + \varepsilon v_0,\\
v_2 &= v_1 + \varepsilon f(x_1), & x_2 &= x_1 + \varepsilon v_1,\\
&\ \vdots\\
v_n &= v_{n-1} + \varepsilon f(x_{n-1}) & x_n &= x_{n-1} + \varepsilon v_{n-1}
\end{aligned}$$

として時間発展を決定してゆくものである．これをニュートン方程式に対するオイラー法と呼ぶ．

ニュートン方程式の解法の例 I

$n = 2$ の

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x(t)$$

の場合を考える．振り子の微小振動を表す運動方程式である．$x(t)$ は振り子の角度に相当する．
これを

$$\begin{pmatrix} \frac{dv(t)}{dt} \\ \frac{dx(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

とすると $x(0) = 1,\ v(0) = 0$ の場合は $x(t) = \cos(t),\ v(t) = \sin(t)$ が解となる．
オイラー法でも ε を十分小さくすると，この解に近づく．

ニュートン方程式の解法の例 I I

$n = 2$ の

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\sin(x(t))$$

の場合を考える．これは振り子の微小振動でないときも含め一般の運動を表す運動方程式である．$x(t)$ は振り子の角度に相当する．$x(0) \ll 1$ の場合は，上記のものに一致するが，$x(0) \sim 2$ 程度になると非線形性が強くなる．
解析解は「楕円関数」というもので表現できることが知られている．

課題９ add

オイラーの法について、アルゴリズムをまとめた後、以下の方程式を解くプログラムを作成し、解を求め、問題 1 は解析解との差を、問題 2 は問題 1 との差を報告せよ．
但し，初期値は適当に定めよ．

問題 1 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -x$　　問題 2 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\sin x$

4 次のルンゲ・クッタ法

$n=1$ の

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$$

の場合を考える．$f(a,b)$ は与えられているとして，固定する．

$$x_n = x_{n-1} + \varepsilon\frac{1}{6}(h_{n,1} + 2h_{n,2} + 2h_{n,3} + h_{n,4})$$

但し

$$\begin{aligned}
h_{n,1} &= f(t_n, x_n)\\
h_{n,2} &= f(t_n + \frac{\varepsilon}{2}, x_n + \frac{\varepsilon}{2}h_{n,1})\\
h_{n,3} &= f(t_n + \frac{\varepsilon}{2}, x_n + \frac{\varepsilon}{2}h_{n,2})\\
h_{n,4} &= f(t_n + \varepsilon, x_n + \varepsilon h_{n,3})
\end{aligned}$$

このようにして間発展を決定してゆくものがルンゲ・クッタ法と呼ばれるものである．

1 Euler1_hint の解説

オイラー法の計算

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double euler(double x, double t, double dt,
             double (*func)(double x, double t)) {
   /*--------------------
   return ??????????????
   ------------------*/
}

double func1(double x, double t) {
  return x / 2.0;
}

double Func1(double t) {
   return exp(t / 2.0);
}

double func2(double x, double t) {
   return (x / (2.0 * t));
}

double Func2(double t) {
   return sqrt(t);
}

double fabs(double x) {
  if (x < 0.0) return -x;
  return x;
}

double error(double x1, double x2) {
  return fabs((x1 - x2) / x2);
}
```

main 部

```
int main(void) {
    char name[32]; /* ファイル名を入れる箱 */
    FILE *outfp;   /* 外部出力用ファイルの札（タグ）*/

    double t0, t1, dt;
    double t, told;
    double x, xold;
    int    it, n = 100;

    sprintf_s(name, "data%d.csv", 1);
    fopen_s(&outfp, name, "w");


    t0 = 0.0;
    t1 = 1.0;
    dt = (t1 - t0) / (double)(n);
    xold = 1.0;
    told = t0;
    fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf\n", t0, xold,
                     Func1(told), error(xold, Func1(told)));
    for (it = 0; it < n; it++) {
        x = euler(xold, told, dt, func1);
        t = told + dt;
        fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf\n", t, x,
                         Func1(t), error(x, Func1(t)));
        xold = x;
        told = t;
    }

    fclose(outfp); /* 終了のおまじない */

/*--------------------------------------------------
    sprintf_s(name, "data%d.csv", 2);
    fopen_s(&outfp, name, "w");


    t0 = 1.0;
    t1 = 2.0;
    dt = (t1 - t0) / (double)(n);


    fclose(outfp);
----------------------------------------------*/
    return 0;
}
```

オイラー法２階微分方程式の計算

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double euler_x(double x, double v, double dt) {
    return x + dt * v;
}

double euler_v(double v, double x, double dt,
    double(*func)(double x)) {
    return v + dt * func(x);
}

double func1(double x) {
    return -x;
}

double Func1x(double t) {
    return cos(t);
}

double Func1v(double t) {
    return -sin(t);
}

double func2(double x) {
    return -sin(x);
}


double fabs(double x) {
    if (x < 0.0) return -x;
    return x;
}

double error(double x1, double x2) {
    return fabs(x1 - x2);
}
```

main 部

```
int main(void) {
    char name[32]; /* ファイル名を入れる箱 */
    FILE *outfp;   /* 外部出力用ファイルの札（タグ）*/

    double t0, t1, dt;
    double t, told;
    double x, xold;
    double v, vold;
    double xamp;
    double vamp;
    double period;
    int    it, n = 100;

    sprintf_s(name, "data%d.csv", 1);
    fopen_s(&outfp, name, "w");


    t0 = 0.0;
    t1 = 6.0;
    dt = (t1 - t0) / (double)(n);
    xold = 1.0;
    vold = 0.0;
    told = t0;
    fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f\n", t0
        Func1x(told), Func1v(told),
        error(xold, Func1x(told)), error(vold, Func1v(told))
    for (it = 0; it < n; it++) {
        x = euler_x(xold, vold, dt);
        v = euler_v(vold, xold, dt, func1);
        t = told + dt;
        fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f\n"
            Func1x(t), Func1v(t),
            error(x, Func1x(t)), error(v, Func1v(t)));
        xold = x;
        vold = v;
        told = t;
    }

    fclose(outfp); /* 終了のおまじない */

    sprintf_s(name, "data%d.csv", 2);
    fopen_s(&outfp, name, "w");

    n = 2000;
    t0 = 0.0;
    t1 = 15.0;
    dt = (t1 - t0) / (double)(n);
    xamp = 2.9;
    vamp = sqrt(2 * (1 - cos(xamp)));
    period = 8.0 / 3.1415;
    xold = xamp;
    vold = 0.0;
    told = t0;
    fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f\n", t0
        xamp*Func1x(told/period), vamp*Func1v(told/period),
        error(xold, vamp*Func1x(told/period)),
        error(vold, vamp*Func1v(told/period)));
    for (it = 0; it < n; it++) {
        x = euler_x(xold, vold, dt);
        v = euler_v(vold, xold, dt, func2);
        t = told + dt;
        fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f\n"
            xamp*Func1x(t/period), vamp*Func1v(t/period),
            error(x, xamp*Func1x(t/period)),
            error(v, vamp*Func1v(t/period)));
        xold = x;
        vold = v;
        told = t;
    }
    fclose(outfp); /* 終了のおまじない */
    return 0;
}
```