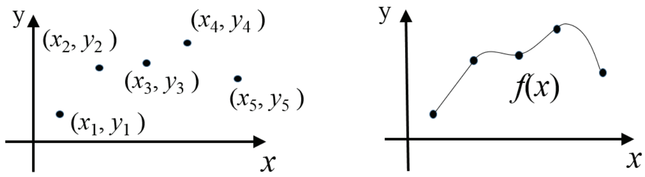
情報処理 I：ラグランジュ補間法　松谷茂樹

2015.10.1a

xy 平面上の n 点を曲線で補間する

やりたいこと：xy 平面上の n 点を曲線で結びたい！
曲線は r 次曲線，$y = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$，とする



xy 平面上の n 点を曲線で補間する

r 次曲線 $y = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ を決めるとは，
⇔　係数 a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, r)$ を決めること！
　　0 が含まれていることに注意！
r 次曲線の係数の数は $(r+1)$ 個！

xy 平面上の n 点を曲線で補間する

xy 平面上の n 点は (x_i, y_i)　　$(i = 1, 2, \ldots, n)$
n 個の既知のデータで決定できる、未知の変数の数は n 個
⇒　決められる曲線は $(n-1)$ 次曲線

xy 平面上の n 点を曲線で補間する

xy 平面上の n 点は (x_i, y_i)　　$(i = 1, 2, \ldots, n)$
n 個の既知のデータで決定できる、未知の変数の数は n 個
⇒　決められる曲線は $(n-1)$ 次曲線

xy 平面上の n 点を曲線で補間する

n 点 (x_i, y_i)　　$(i = 1, 2, \ldots, n)$ を $(n-1)$ 次曲線が通るとは

$$\begin{cases} a_{n-1}x_1^{n-1} & +a_{n-2}x_1^{n-2} & +\cdots & +a_1x_1 & +a_0 & = & y_1 \\ a_{n-1}x_2^{n-1} & +a_{n-2}x_2^{n-2} & +\cdots & +a_1x_2 & +a_0 & = & y_2 \\ a_{n-1}x_3^{n-1} & +a_{n-2}x_3^{n-2} & +\cdots & +a_1x_3 & +a_0 & = & y_3 \\ & & & & \vdots & & \\ a_{n-1}x_n^{n-1} & +a_{n-2}x_n^{n-2} & +\cdots & +a_1x_n & +a_0 & = & y_n \end{cases}$$

の事！　この a_i 達を決定する。即ち

$$\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^{n-1} & x_3^{n-2} & \cdots & x_3^2 & x_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

xy 平面上の n 点を曲線で補間する

$$A = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^{n-1} & x_3^{n-2} & \cdots & x_3^2 & x_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$, \quad \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$ として，$A\overrightarrow{a} = \overrightarrow{y}$ を解く！

xy 平面上の n 点を曲線で補間する

A は特殊な行列（van der Morde 行列）で，その逆行列はわかっており，それを利用したのが、ラグランジュ補間法

xy 平面上の n 点を曲線で補間する $n = 2$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a} = A^{-1}\overrightarrow{y}$$

より，

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ -x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{pmatrix}$$

よって、

$y = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \dfrac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$ が得られる。

xy 平面上の n 点を曲線で補間する $n = 3$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(x_2 + x_3) & -(x_1 + x_3) & -(x_1 + x_2) \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix}$$ を考えると

AB は

$$\begin{pmatrix} (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) & 0 & 0 \\ 0 & (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) & 0 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} & \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} & \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ -\frac{(x_2 + x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} & -\frac{(x_1 + x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} & -\frac{(x_1 + x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ \frac{x_2 x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} & \frac{x_1 x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} & \frac{x_1 x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{pmatrix}$$

xy 平面上の n 点を曲線で補間する $n=3$ の場合（つづき）

$\overrightarrow{a} = A^{-1}\overrightarrow{y}$ より，

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ -\frac{y_1(x_2+x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \frac{y_2(x_1+x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} - \frac{y_3(x_1+x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ \frac{x_2x_3y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{x_1x_3y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{x_1x_2y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{pmatrix}$$

よって

$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ が得られる。

ラグランジュ補間法（線形代数からの帰結）

一般には未定義であるが $n \times n$ 行列の行列式が計算できるとして

$$A = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^{n-1} & x_3^{n-2} & \cdots & x_3^2 & x_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(x,y) = \begin{pmatrix} y_1 & x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3^{n-1} & x_3^{n-2} & \cdots & x_3^2 & x_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_{n-1} & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\ y_n & x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n^2 & x_n & 1 \\ y & x^{n-1} & x^{n-2} & \cdots & x^2 & x & 1 \end{pmatrix}$$

として $f(x,y) = \dfrac{\det(B(x,y))}{\det A}$

に対して，

$f(x,y) = 0$

とするのがラグランジュ補間のアルゴリズムである。

これは次のような事実により一次方程式の解法と関係している。

一次方程式の解法

一次方程式の解法に関わる問題として，

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して $Av = b$ を解くことは，$v = A^{-1}b$ と v を b から書き下すことである．このとき不定元からなる集合 $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n+1})$ に対して形式的な行列を

$$A_{b,c} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & \cdots & c_n & c_{n+1} \end{pmatrix},$$

と定義し $f_{A,b}(c) := \dfrac{\det A_{b,c}}{\det A}$ とする．$f_{A,b}(c) = c_{n+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i c_i$ として係数 u_i を定めると $u_i = v_i$ となる（逆行列の公式を考えれば判る）．

ラグランジュ補間法（一般版）

これは次のようにも書ける：まず

$$p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

を用意し、

$$g_i(x) = \frac{p(x)}{(x-x_i)}$$

このとき、上記の結果は

$$y = y_1\frac{g_1(x)}{g_1(x_1)} + y_2\frac{g_2(x)}{g_2(x_2)} + \cdots + y_n\frac{g_n(x)}{g_n(x_n)}$$

と書き下せ。これが通常ラグランジュ補間のアルゴリズムとして知られている。

ラグランジュ補間法の直接的解釈

上記 $z_i(x) = g_i(x)/g_i(x_i)$ には次の性質がある

$$z_i(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_j (j \neq i) \end{cases}$$

よって，上記の式で y を x の関数と眺めた際に $x = x_i$ のとき，$y = y_i$ に一致する。

xy 平面上の n 点を曲線で補間する $n=2$ の場合

$$f(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y & x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

を計算すると上記のものを再現している。$f(x,y) = 0$

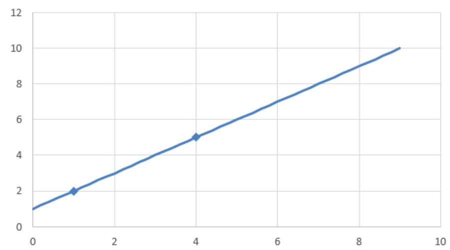
xy 平面上の n 点を曲線で補間する $n=3$ の場合

$$f(x,y)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ y & x^2 & x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

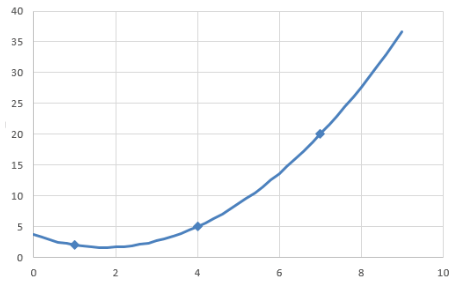
を計算すると上記のものを実は再現している。$f(x,y)=0$

例題

1. $(x_1,y_1)=(1,2)$, $(x_2,y_2)=(4,5)$ を通る曲線（今の場合、曲線のグラフ）を excel を使って図示せよ。



2. $(x_1,y_1)=(1,2)$, $(x_2,y_2)=(4,5)$，$(x_2,y_2)=(7,20)$ を通る曲線のグラフを excel を使って図示せよ。



問題

1. $(x_1,y_1)=(1,2)$, $(x_2,y_2)=(5,9)$ を通る曲線（今の場合、曲線のグラフ）を excel を使って図示せよ。
2. $(x_1,y_1)=(1,2)$, $(x_2,y_2)=(5,9)$，$(x_2,y_2)=(7,20)$ を通る曲線のグラフを excel を使って図示せよ。
3. $(x_1,y_1)=(1,2)$, $(x_2,y_2)=(5,9)$，$(x_2,y_2)=(7,0)$ を通る曲線のグラフを excel を使って図示せよ。