KdV 流れと弾性曲線の統計力学

松谷 茂樹 [1], Emma Previato[2]
[1] 佐世保工業高等専門学校，[2]Boston University
e-mail : smatsu@sasebo.ac.jp

1　概要

平面曲線の変形において，等長変形のみならず，等弾性エネルギー変形の不変性を課すと，自然に変形 KdV 階層が現れることを示す [1].

2　平面曲線の分類

1995 年から弾性曲線の統計力学について研究を行ってきた [2, 3]．平面閉曲線全体を

$$\mathcal{M} := \{Z : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C} | \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni s \mapsto Z(s) \in \mathbb{C},$$
$$Z \in \mathcal{C}^\omega(S^1, \mathbb{C}), |dZ/ds| = 1, \oint |dZ| = 2\pi\},$$

とし，ユークリッド群の作用による同値関係 $\sim$ による商空間 $\mathbb{M} := \mathcal{M}/\sim$ 更に，自明な作用による商空間 $\mathfrak{M} := \mathbb{M}/\mathrm{U}(1)$ を考える．また，付随する射影を $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{M} \to \mathbb{M}$，$\mathrm{pr}_2 : \mathbb{M} \to \mathfrak{M}$ とするを共に考える．弾性曲線の統計力学を構築するためには弾性曲線の一つとして，これらの幾何構造を分類することが必須となる．

分類において，オイラー・ベルヌーイ・エネルギー

$$\mathcal{E}[Z] := \oint \{Z, s\}_{\mathrm{SD}} ds = \frac{1}{2} \oint k^2 ds,$$

によるボルツマン重み $\mathrm{e}^{-\mathcal{E}[Z]\beta}$ $\beta > 0$ を加味することで，適切な位相 $\mathfrak{M}$ などに導入したい考えている．ここで，$\{Z, s\}_{\mathrm{SD}}$ はシュワルツ微分であり，k は曲線の曲率

$$k(s) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{Z''(s)}{Z'(s)} = \partial_s \varphi(s)$$

であり，φ は接角である．数理物理的には

$$\mathcal{Z}[\beta] = \int_{\mathfrak{M}} DZ \exp(-\beta \mathcal{E}[Z])$$

となる分配関数を求めることが目標である．

そこで，$Z \in \mathcal{M}$ の接空間 $T_Z\mathcal{M}$ の構造を微小変形を考察することで定め，その後に流れを考えることで $\mathcal{M}$ 自身の構造を分類するというアプローチを取っている [2, 3, 1].

以下のために，$\mathcal{A}^p_{S^1}(K)$ を実解析的な S^1 上の K 値を取る p-形式を用意する．K は $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ である．

接空間 $T_Z\mathcal{M}$ を観察するために変形として

$$\partial_t Z(s) = v(s)\partial_s Z(s), s \in S^1, \quad v \in \mathcal{A}^0_{S^1}(\mathbb{C}),$$
$$\left(v(s) = v^{(\mathrm{r})}(s) + \sqrt{-1}v^{(\mathrm{i})}(s), \quad v^{(\mathrm{r})}, v^{(\mathrm{i})} \in \mathcal{A}^0_{S^1}(\mathbb{R})\right)$$

を考察する．

このとき，次が良く知られている [4, 5].

命題 1 $Z \in \mathbb{M}$ に対して，等長変形 $[\partial_s, \partial_t]Z = 0$ は以下の二つの式に還元される [4, 5]:

$$\partial_t k = \partial_s \Omega^{(\mathrm{I})} v^{(\mathrm{r})} = \Omega^{(\mathrm{II})} v^{(\mathrm{i})}, \qquad (1)$$
$$k v^{(\mathrm{i})} = \partial_s v^{(\mathrm{r})}. \qquad (2)$$

但し，

$$\Omega^{(\mathrm{I})} := \partial_s(\partial_s \frac{1}{k} \partial_s + k), \quad \Omega^{(\mathrm{II})} := \partial_s^2 + \partial_s(k\partial_s^{-1}k),$$

2.1　関係式 (2)

上記の関係 (2) を考察するために，まず，

$$\ell_d : \mathcal{A}^0_{S^1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^1_{S^1}(\mathbb{R}), \quad \ell_d(v^{(\mathrm{i})}) = k v^{(\mathrm{i})} ds,$$

を考える．このとき，$d\mathcal{A}^0_{S^1}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}^1_{S^1}(\mathbb{R})$ の逆像 $\widehat{\mathcal{A}}^0_{S^1}(\mathbb{R}) := \ell_d^{-1} d\mathcal{A}^0_{S^1}(\mathbb{R})$ とし，

$$\widehat{\ell}_d : \widehat{\mathcal{A}}^0_{S^1}(\mathbb{R}) \to d\mathcal{A}^0_{S^1}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}^1_{S^1}(\mathbb{R}),$$
$$\widehat{\ell}_d(v^{(\mathrm{i})}) = k v^{(\mathrm{i})} ds = \partial_s v^{(\mathrm{r})} ds = dv^{(\mathrm{r})}.$$

とする写像を導入する．$\ell_r : \widehat{\mathcal{A}}^0_{S^1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^0_{S^1}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$ を $\ell_r(v^{(\mathrm{i})}) = \int_0^s k v^{(\mathrm{i})} ds = \int_0^s \partial_s v^{(\mathrm{r})} ds$ とし，積分値が零となるよう代表元を定める．これらにより

$$\ell : \widehat{\mathcal{A}}^0_{S^1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^0_{S^1}(\mathbb{C}), \quad \ell(f) = \ell_r^0(f) + \sqrt{-1} f,$$

とする写像が得られる．これにより，

命題 2 任意の $v \in \widehat{\mathcal{A}}^0_{S^1}(\mathbb{R})$ と $\tilde{Z} \in \mathcal{M}$ に対して ℓ は全単射 $\ell^\sharp$ と全射 $\ell^\flat$ を誘導する：

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{A}}^0_{S^1}(\mathbb{R}) \arrow[r, "\ell^\sharp"] \arrow[dr, "\ell^\flat"'] & T_{\tilde{Z}}(\mathcal{M}) \arrow[d, "\mathrm{pr}_{1*}"] \\
 & T_{\mathrm{pr}_1(\tilde{Z})}(\mathbb{M})
\end{tikzcd}$$

2.2 等エネルギー変形

エネルギーを加味した分類を行うために

$$\mathbb{M}_E := \{Z \in \mathbb{M} \mid \mathcal{E}[Z] = E \text{ is preserved}\},$$

を導入し，自然な射影 $\mathrm{pr}_E : \mathbb{M}_E \to \mathfrak{M}_E := \mathbb{M}_E/\mathrm{U}(1)$ を考える．つまり，エネルギーを保存する変形を考える。そのために，上述の$T_Z\mathcal{M}$の内，エネルギーを保存する成分を考察する．つまり，微小等エネルギー変形を考える：

命題 3 $Z \in \mathbb{M}$ において，等エネルギー変形 $\partial_t \mathcal{E}(Z) = 0$となるための必要十分条件は$k\partial_t k ds \in d\mathcal{A}^0_{S^1}(\mathbb{R})$となることである．即ち，$k\partial_t k = \partial_s f$，但し $f \in \mathcal{A}^0_{S^1}(\mathbb{R})$

これより次が言える：

命題 4 二つの等長変換 $v^{(\mathrm{i})}, v'^{(\mathrm{i})} \in \widehat{\mathcal{A}}^0_{S^1}(\mathbb{R})$,

$$\partial_t Z = (\ell(v^{(\mathrm{i})}))\partial_s Z \quad or \quad \partial_t k = \Omega^{(\mathrm{II})} v^{(\mathrm{i})},$$
$$\partial_{t'} Z = (\ell(v'^{(\mathrm{i})}))\partial_s Z \quad or \quad \partial_{t'} k = \Omega^{(\mathrm{II})} v'^{(\mathrm{i})},$$

が関係式$\partial_t k = v'^{(\mathrm{i})}$を満たすと，次が成り立つ:

1) 微小変形$\partial_t Z$が等エネルギー的, *i.e.,* $\partial_t \mathcal{E}[Z] = 0$,

2) $\partial_{t'} k = \Omega^{(\mathrm{II})} v'^{(\mathrm{i})} = {\Omega^{(\mathrm{II})}}^2 v^{(\mathrm{i})}$.

命題 5 $v^{(\mathrm{i})} \in \mathcal{A}^0_{S^1}(\mathbb{R})$でかつ$\{{\Omega^{(\mathrm{II})}}^n v^{(\mathrm{i})}\}_{n=0,1,2,\dots}$の元すべてが$\widehat{\mathcal{A}}^0_{S^1}(\mathbb{R})$ に属しているならば，パラメータ $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots) \in [0, \varepsilon)$, に対して，以下の等長・等エネルギー微小変形の方程式を得る：

$$\partial_{\tilde{t}_1} k = \Omega^{(\mathrm{II})} v^{(\mathrm{i})},$$

$$\partial_{\tilde{t}_2} k = \Omega^{(\mathrm{II})} \partial_{\tilde{t}_1} k = {\Omega^{(\mathrm{II})}}^2 v^{(\mathrm{i})},$$

$$\partial_{\tilde{t}_3} k = \Omega^{(\mathrm{II})} \partial_{\tilde{t}_2} k = {\Omega^{(\mathrm{II})}}^2 \partial_{\tilde{t}_1} k = {\Omega^{(\mathrm{II})}}^3 v^{(\mathrm{i})},$$

$$\vdots$$

3 静的変形

補題 6 任意の実数$c \in \mathbb{R}$と$Z \in \mathbb{M}$, $Z(s + ct)$, 静的変形とは以下の解である：

$$\partial_t Z = c\partial_s Z.$$

命題 7 静的変形は射影 $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{M} \to \mathfrak{M}$ に対して不変である．

ここで静的変形

$$\partial_{t_1} k = {\Omega^{(\mathrm{II})}}^0 \partial_s k = \partial_s k.$$

は等長でかつ，等エネルギー変形となっていることに注意し，${\Omega^{(\mathrm{II})}}^\ell \partial_s k$が$\widehat{\mathcal{A}}^0_{S^1}(\mathbb{R})$の元となることより，次が得られる：

命題 8 任意の $Z \in \mathbb{M}$ *and* $k := k[Z]$ に対して，静的変形 $\partial_{t_1} k = \partial_s k$, から始める階層 $\{{\Omega^{(\mathrm{II})}}^n \partial_s k\}_{n=0,1,2,\dots}$ は$\widehat{\mathcal{A}}^0_{S^1}(\mathbb{R})$に属し，次の等長，等エネルギー関係式を得る：

$$\partial_{t_2} k = \Omega^{(\mathrm{II})} \partial_{t_1} k = \Omega^{(\mathrm{II})} \partial_s k,$$
$$\partial_{t_3} k = \Omega^{(\mathrm{II})} \partial_{t_2} k = {\Omega^{(\mathrm{II})}}^2 \partial_{t_1} k = {\Omega^{(\mathrm{II})}}^2 \partial_s k,$$
$$\partial_{t_4} k = \Omega^{(\mathrm{II})} \partial_{t_2} k = {\Omega^{(\mathrm{II})}}^2 \partial_{t_2} k = {\Omega^{(\mathrm{II})}}^3 \partial_s k,$$
$$\vdots$$

これは変形 KdV 階層に一致する．

変形 KdV 階層は積分可能であるため，微小変形は積分でき$\mathbb{M}$や$\mathfrak{M}$，$\mathbb{M}_E$や$\mathfrak{M}_E$などの分解を与える．

参考文献

[1] S. Matsutani and E. Previato, *From Euler's elastica to the mKdV hierarchy, through the Faber polynomials* , arXiv:1511.08658.

[2] S. Matsutani, *Statistical Mechanics of Elastica on a plane: Origin of MKdV hierarchy*, J. Phys. A, **31** (1998) 2705-2725.

[3] S. Matsutani and Y. Ônishi, *On the Moduli of a Quantized Elastica in $\mathbb{P}$ and KdV Flows: Study of Hyperelliptic Curves as an Extension of Euler's Perspective of Elastica I*, Rev. Math. Phys., **15** (2003) 559-628.

[4] R.E. Goldstein and D.M. Petrich, *The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 3203-3206.

[5] R.E. Goldstein and D.M. Petrich, *Solitons, Euler's equation, and the geometry of curve motion*, in Singularities in fluids, plasmas and optics (Heraklion, 1992), 93-109, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 404, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.