数理科学 I　松谷茂樹

0　写像とは

ここで写像の復習をする．

写像

定義 0.1　集合 A から集合 B に**写像** f が与えられているとは，A の各要素 a に応じて B の元 $f(a)$ がひとつ対応づけられている事である．
このとき，写像は「$f : A \to B$」と表し，各元の対応は「$f : a \mapsto b$」と記す

記号についての注意：“$\to$” は集合からの集合の写像に “$\mapsto$” は元の対応を示すのに使う。
A を f の**定義域**と言う。

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$

を f の**像**（**値域**）と呼ぶ．

f に対して，f の像 $f(A)$ は一般に B に一致しない。

写像 $f : A \to B$ に対して，次を注意する。

(a) f は A の全ての元に対して，対応が与えられている．（与えられていない場合は写像とはいえない．）

(b) 対応先は B の中に納まっていることが必須である

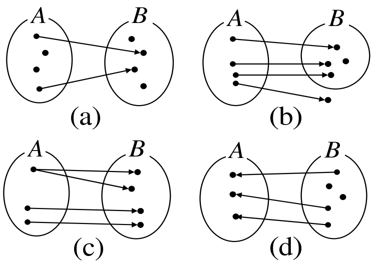

図 3-1

(c) A の元 a に対して，$f(a) \in B$ が一つ定まるのであって，B の元が 2 つ対応しているものは写像ではない。

関数は写像の一種であるが、時折、応用の現場で現れる「2 価関数」は現代数学的な用語では「関数ではない」。

(d) f に対して，対応を逆向きにした場合 ($B \to A$ は) 一般に写像とはならない。

写像は可逆ではない。（矢印の方向に異方性がある）

従って，それぞれの注意により，次の図 3-1 のいずれも写像とはならない。

写像の重要な概念である単射，全射，全単射についても定義する。

単射、全射、全単射

定義 0.2　写像 $f : A \to B$ が**単射 (1 対 1)** とは $f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$ のときである．
写像 $f : A \to B$ が**全射**（**上への写像**）とは $f(A) = B$ となるときである．
写像 $f : A \to B$ が**全単射**とは，f が単射でかつ全射であるときである．

単射は injection、全射は surjection、全単射は bijection と英語ではいう。

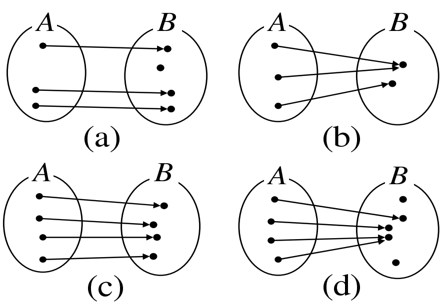

図 3-2

図 3-2 において (a) は単射，(b) は全射，(c) は全単射，(d) はその何れでもない写像です．

写像の例

以下は写像の例となる

1. 領域 U 上の関数 f ($x \in U$ に対して $f(x)$ が対応される）
2. 以下の線型写像の例
3. 整数 $a \in \mathbb{Z}$ に対して、$a \in \mathbb{R}$ とみなす写像 $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

0.1　線型写像

線型写像とはベクトル空間とベクトル空間の間に定義される特殊な写像のことである。

実ベクトル空間とは

1. 加法性が成り立つ
2. 実数倍が成り立つ
3. 加法性と実数倍が整合している

というものであった。**この性質を保つ写像のことを線型写像**と呼ぶ。

線型写像

定義 0.3　*2* つの $\mathbb{R}$ ベクトル空間 V と W に対して，写像

$$f : V \to W$$

が**線型写像**又は $\mathbb{R}$-**線型写像**とは
1. $v_1, v_2 \in V$ に対して $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$,
2. $a \in \mathbb{R}$ と $v \in V$ に対して $f(av) = af(v)$,
の *2* つが成り立つことである．

線型写像の定義はこれだけであることに注意する
注意としては、
性質 1 はベクトル空間 V での加法性と、f によって写った後のベクトル空間 W での加法性が無矛盾であることを意味し
性質 2 は、V での実数倍が f によって写った後のベクトル空間 W での実数倍と無矛盾であることを意味している。

0.2　線型写像の例

1. 平面ベクトルに対する行列計算

   W を平面ベクトル全体とする．$u \in W$ は $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ と書けた。
   $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in W$ に対するある行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ による変換

   $$Au = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix}$$

   は上記の線型変換の例である。

   $$f_A : W \to W, \quad f_A(u) = Au \text{ と見ている}$$

   実際：

   (a) **(加法性)** $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in W$ に対して

   $$A(u + v) = Au + Av$$

   (b) **(実数倍)** $u \in W$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して

   $$A(au) = aAu$$

   となる。

2. 実数値の関数空間は制限がつかなければ、$\mathbb{R}$ 線型空間になる。それに従い、二つの関数空間に対して、線型写像が存在する。

$\mathcal{C}^{\infty}(U,\mathbb{R}) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f$ は無限回微分可能 $\}$ を考えよう。

微分作用素 $\frac{d}{dx}$ は $\mathcal{C}^{\infty}(U,\mathbb{R})$ から $\mathcal{C}^{\infty}(U,\mathbb{R})$ への線型写像となっている。

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{C}^{\infty}(U,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{\infty}(U,\mathbb{R})$$

実際：

(a) (加法性) $f,g \in \mathcal{C}^{\infty}(U,\mathbb{R})$ $(f+g) \in \mathcal{C}^{\infty}(U,\mathbb{R})$ （各点 $x \in U$ において $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$）

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

より詳しくは各点 $x \in U$ において $\frac{d(f+g)}{dx}(x) = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$ となる。

(b) (実数倍) $f \in \mathcal{C}^{\infty}(U,\mathbb{R})$ $a \in \mathbb{R}$ （各点 $x \in U$ において $(af)(x) = af(x)$）

$$\frac{d}{dx}(af) = a\frac{d}{dx}f = a\frac{df}{dx}$$

より詳しくは各点 $x \in U$ において $\frac{d(af)}{dx}(x) = a\frac{df(x)}{dx}$ となる。

(c) 一般に n 次元ベクトル空間 V から m 次元ベクトル空間 W へ $m \times n$ 行列による変換は線型写像となっている。

$A = (a_{ij})_{i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n}$ $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ に対して

$Au = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}u_j \end{pmatrix}$ は、線型変換の定義を満たす。

（この掛け算は以下の行列の計算方法の $N = m, M = n, K = 1$ の場合に相当している。）

線型写像でない例

1. 平行移動は線型写像（線型変換）ではない。$w \in W$ を一つ固定する。$w \neq 0$ とする

$$f_w : W \to W, \quad f_w(u) := u + w$$

とすると

$f_w(u+v) = u+v+w$ に対して $f_w(u)+f_w(v) = u+v+2w$ となり

$$f_w(u+v) \neq f_w(u) + f_w(v)$$

また $f_w(au) = au + w$ に対して $af_w(u) = au + aw$ となり $a \neq 1$ ならば

$$f_w(au) \neq af_w(u)$$

となる。

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ は上記を満たさない。よって、このような写像を非線型写像と呼ぶ場合がある。

線型写像の特徴

1. 実-線型写像の合成は実-線型写像である
2. 実-線型写像全体は実ベクトル空間となる

行列の計算方法

$(N \times M)$ 行列 $A = (a_{ij})_{i=1,2,\dots,N,j=1,2,\dots,M}$ と $(M \times K)$ 行列 $B = (b_{ij})_{i=1,2,\dots,M,j=1,2,\dots,K}$ に対して、行列の掛け算は $AB = \left(\sum_{k=1}^{M} a_{ik}b_{kj}\right)_{i=1,2,\dots,N,j=1,2,\dots,K}$ と $(N\times K)$ 行列なる。

例 1　$(N,M,K) = (3,2,2)$ の場合、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

例 2　$(N,M,K) = (3,1,2)$ の場合

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} \end{pmatrix}$$

行列の積と線型変換の合成

K 次元ベクトル空間 U から M 次元ベクトル空間 V の変換を行列 B により行い、
K 次元ベクトル空間 V から M 次元ベクトル空間 W の変換を行列 A により行い際に

$$f_B : U \to V, \quad (f_A(u) = Au) \quad f_A : V \to W \quad (f_B(v) = Bv),$$

その合成は

$$f_A \circ f_B : U \to W$$

は、$u \in U$ に対して $(f_A \circ f_B)(u) := AB(u)$ となる。
。

行列全体

$N \times M$ 行列は M 次元実ベクトル空間 V から N 次元実ベクトル空間 W への線型変換に対応した。
$N \times M$ 行列全体

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(N,M) &:= \{N \times M \text{ 行列 }\} \\ &= \{(a_{ij})_{i=1,2,\dots,N,j=1,2,\dots,M} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

は、$N \times M$ 次元ベクトル空間になる。
後々のために

$$\mathrm{Mat}(N,M) = \mathrm{Mat}(V \to W)$$

と記す。

1　双対空間

双対空間とは

V を実ベクトル空間のとき、V の双対空間とは、実ベクトル空間 $\mathrm{Mat}(V \to \mathbb{R})$ のことである。$\mathbb{R}$ は 1 次元実ベクトル空間のことである。$V^* = \mathrm{Mat}(V \to \mathbb{R})$ と記すことがある。
即ち、$f \in \mathrm{Mat}(V \to \mathbb{R})$ は

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $f(au) = af(u)$
3. $f(u)$ は（1 次元の）実数値を取る

双対空間の例 1

V を N 次元実ベクトル空間を N 成分縦ベクトルの空間と考えるとき、

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

V の双対空間とは、N 成分横ベクトル空間全体である

$$V^* = \mathrm{Mat}(V \to \mathbb{R}) = \{(b_1, \cdots, b_N) \mid b_i \in \mathbb{R}\}$$

N 成分縦ベクトルの空間は N 次元実ベクトル空間とも呼ぶ。双対空間の N 成分横ベクトルの空間も、N 次元実ベクトル空間と見なすことができる。

双対空間の例 2

V が実値関数空間 $V := \{f : U \to \mathbb{R} \mid$ 連続 $\}$ 場合、適当な重み関数 $w(x)$ を用意することで,
$f \in V$ に対して,

$$\int_U f(x)w(x)dx$$

とすると、$f, g \in V$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して

1. $\displaystyle\int_U (f(x) + g(x))w(x)dx = \int_U f(x)w(x)dx + \int_U g(x)w(x)dx$
2. $\displaystyle\int_U (af(x))w(x)dx = a\int_U f(x)w(x)dx$

よって，$\mathrm{Mat}(V \to \mathbb{R})$ の中には

$$W := \left\{ \int_U \circ w(x)dx \mid w(x) \in V \right\}$$

という空間が存在する。

双対空間の例 3

V が実値関数空間 $V := \{f : U \to \mathbb{R} \mid$ 連続 $\}$ の場合、適当な点 $x_0 \in U$ を固定して
$p_{x_0} : V \to \mathbb{R}$ を $f \in V$ に対して,

$$p_{x_0}(f) = f(x_0)$$

とすると、$f, g \in V$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して

1. $p_{x_0}(f + g) = f(x_0) + g(x_0) = p_{x_0}(f) + p_{x_0}(g)$
2. $p_{x_0}(af) = af(x_0) = ap_{x_0}(f)$

これはディラック δ 関数として積分で記述できる。

2 内積

ベクトル空間とその双対空間とのペアリング

V を実ベクトル空間とその V の双対空間 $V^* = \mathrm{Mat}(V \to \mathbb{R})$ の元をそれぞれ一つずつ選ぶと

$$u \in V, \quad w \in V^*$$

実数値 a が

$$w(u)$$

が定まる。（なぜならば、w は V から $\mathbb{R}$ への線型写像であるため、その値は実数である。） これを $< w, u >$ と書く。
どんな実ベクトル空間においても、このような双対写像は存在する

ベクトル空間とその双対空間とのペアリング

V を N 次元実ベクトル空間を N 成分縦ベクトルの空間

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots, a_N \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

と考えるとき、その V の双対空間とは、N 成分横ベクトル空間全体

$$V^* = \mathrm{Mat}(V \to \mathbb{R}) = \{(b_1, \cdots, b_N) \mid b_i \in \mathbb{R}\}$$

である。それぞれ

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in V, \quad w = (w_1, \cdots, w_N) \in V^*$$

を選ぶと

$$w(u) =< w, u >= (w_1, \cdots, w_N) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}$$

となる。

内積 (一般の内積)

V の元 u, v に対して、内積

$$(u, v) \in \mathbb{R}$$

が定義できるとは v から V^* の線型写像 m（正確には単射な線型写像）が存在し

$$(v, u) =< m(v), u >$$

とする事である。
内積の定義の中に、双対空間への写像 m 分（正確には単射な線型写像分）の自由度が存在し、その任意性があることに注意する
m の事を有限次元の場合、計量行列と呼ぶ。

この一般の内積を通常使われる正定値内積にするためにはノルムという概念が必須となる。

ベクトル空間の長さ（ノルム）

V を $\mathbb{R}$ ベクトル空間とする。
ユークリッド空間の距離を一般化したものをノルムと呼ぶ。
写像 $\| \, \| : V \to \mathbb{R}$ がノルムとは以下を満たすものである

1. 正定値性: $\|v\| \geq 0$,
2. 非縮退性: $\|v\| = 0$ ならば $v = 0$,
3. 斉次性: $\|av\| = |a|\|v\|$,
4. 劣加法性: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ を満たすもの

あるベクトル空間でノルムは必ずしもユニークに定まらない。特に関数空間の場合は「何を同一と考えるかによって」二つの関数の距離（ノルム）を変更することが可能である。

正定値内積（厳密版）

V を $\mathbb{R}$ ベクトル空間とする
以下の正定値内積を単に内積と呼ぶ。
$\mathbb{R}$ 双線型写像 $(,) : V \times V \to \mathbb{R}$ が正定値内積であるとは以下を満たす事である：
(1) 任意の元 $u, v \in V$ に対して，$(u, v) = (v, u)$
(2) 任意の元 $u \in V$ に対して，$(u, u) \geq 0$ であり，$(u, u) = 0$ となるのは $u = 0$ に限る.

2.1 内積に関わる諸々性質

内積と双対空間

内積は関数空間の間でも定義できる。それは多くは積分として記述される。
例）直交多項式（ルジャンドル多項式）などの特殊関数：

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} dx f(x) g(x)$$

複素ベクトル空間にもエルミート内積が定義できる

信号処理、電子状態計算などでは、複素数値の関数を取り扱う。その場合、それらは複素ベクトル空間と考えられる。
複素ベクトル空間上の内積として自然としてエルミート内積なるものが定義できる。

エルミート内積の定義

$z \in \mathbb{C}$ の複素共役を $\overline{z}$ とし，$\mathbb{C}$ ベクトル空間 W に対し通常 $(u, v)_H = \bar{u}_1 v_1 + \cdots + \bar{u}_n v_n$ とするエルミート内積は、以下のように定義される
これは $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathrm{i}$ として W を $\mathbb{R}$ ベクトル空間と捉える。
$\mathbb{C}$ ベクトル空間 W に対して，$\mathbb{R}$ 双線型写像 $(,)_H : W \times W \to \mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathrm{i}$ が**エルミート内積**であるとは以下をみたす事である：
(1) 任意の元 $u, v \in W$，$a \in \mathbb{C}$ に対して，$(u, v)_H = \overline{(v, u)}_H$，$(\overline{a} u, v)_H = (u, av)_H = a(u, v)_H$[a]，
(2) 任意の元 $u \in W$ に対して，$(u, u)_H \geq 0$ であり，$(u, u)_H = 0$ となるのは $u = 0$ に限る．

[a]これは物理屋の慣習です．数学書では $(au, v)_H = (u, \overline{a} v)_H = a(u, v)_H$ とします．

エルミート内積の計量行列 (m_{ij}) は $(\overline{m}_{ji}) = (m_{ij})$ は、**エルミート行列**と呼ばれる。その固有値がすべて正であることである。

内積空間と直交性

$\mathbb{R}$ ベクトル空間 V には (計量 m に依存して) 様々な内積が入ることを見た．その内積のひとつ $(,)$ を選び，$(V, (,))$ のペアの事を**内積空間**と呼ぶ．
内積空間には**直交**という概念が定義できる．V の要素 u と v が直交するとは $(u, v) = 0$ を意味する。V の部分ベクトル空間 U の**直交補空間** $U^{\perp} \subset V$ も定義でき，$U^{\perp} := \{v \in V \mid (v, u) = 0, \forall u \in U\}$ となる．これは双対空間 V^* の部分空間である**直交双対空間** $U^{*\perp} := \{v \in V^* \mid \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in U\}$ と似て非なるものである．つまり，住んでる場所が違う．

グラム・シュミットの直交化

正定値内積を持った $\mathbb{R}$ ベクトル空間 $(V, (,))$ の一次独立な元達，つまり基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に対して，

$$v_1 := u_1,\ v_2 := u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1,$$

$$\ldots \quad v_\ell := u_\ell - \sum_{r=1}^{\ell-1} \frac{(u_\ell, v_r)}{(v_r, v_r)} v_r$$

及び $e_j := v_j / \sqrt{(v_j, v_j)}$ により，**正規直交基底** $\{e_j\}$
$(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$
を得ることができる。
物理では「正規直交」を「規格直交」と呼ぶことがある．
この直交化の手続きを**グラム・シュミットの直交化**と呼ぶ。グラム (1850-1916) の 1883 年の論文よりヒルベルトの弟子のシュミット (1876-1959) が見つけたことからである。

ユークリッド内積

正規直交基底 $\{e_j\}$ より，通常よく知られた**ユークリッド内積**が定義される．つまり，$u = \oplus_{i=1}^{n} u_i e_i$，$v = \oplus_{i=1}^{n} v_i e_i$ に対して (M_m を単位行列として)
$(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$
のことです．このように我々の 3 次元空間では当たり前である**ユークリッド内積というものは，実は面倒な手続きの果に得られるものである**。