情報処理 I：r 進数と補数 松谷茂樹 (2015/5/18 版)

1　r 進数

r 進数の表現

r を 2, 5, 7, 10, 16 などの数として一つ固定する。
ある正の実数 a を r 進数として表すとは

$$a = a_\ell r^\ell + a_{\ell-1}r^{\ell-1} + \cdots + a_2r^2 + a_1r^1 + a_0 \\ + a_{-1}r^{-1} + a_{-2}r^{-2} + a_{-3}r^{-3} + \cdots + a_{-m}r^{-m}$$

但し、
各 $a_i = 0, 1, 2, \dots, r-1$ $(i = \ell, \dots, 2, 1, 0, -1, \dots, -m)$
とすることである。これらは唯一つ定まる。（誰がやっても同じ答えになる）
これを

$$a = (a_\ell \cdots a_3a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\cdots a_{-m})_r \\ = a_\ell \cdots a_3a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\cdots a_{-m}(r)$$

と記す

r 進数の表現の例

1. $109 = 2 \times 7^2 + 1 \times 7 + 4 = (214)_7$
2. $5 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = (101)_2$

r 進数の性質１：整数部　（非零）の特徴

どんな r に対しても r 進数の正の整数部（つまり零ではない）

$$a_{整数} = a_\ell r^\ell + a_{\ell-1}r^{\ell-1} + \cdots + a_2r^2 + a_1r^1 + a_0$$

は 1 以上の整数である。つまり，どんな r に対しても小数部は存在しない *.

*全く、正確ではないが、気分的には $a_{整数} \geq 1$.

r 進数の性質２：整数部　（零）の特徴

どんな r に対しても r 進数の零は 0

$$a_{整数} = 0 = (0)_r$$

r 進数の性質３：小数部の特徴

どんな r に対しても r 進数の正の小数部

$$a_{小数} = a_{-1}r^{-1} + a_{-2}r^{-2} + a_{-3}r^{-3} + \cdots + a_{-m}r^{-m}$$

は 1 より小さい。つまり、どんな r に対しても

$$a_{小数} < 1$$

r 進数の性質４：整数部と小数部への分割

r 進数の正の実数 a は整数部 $a_{整数}$ と小数部 $a_{小数}$

$$a = a_{整数} + a_{小数}$$

に分割できる。このとき a を別の s 進数で表現し、その整数部を $b_{整数}$ と小数部を $b_{小数}$ とすると

$$a_{整数} = b_{整数}, \quad a_{小数} = b_{小数}$$

となり、s 進数や r 進数などの表現の仕方に依存しない。

r 進数の性質５：整数部（零も含む）の特徴

r 進数の正の整数部

$$a_{整数} = a_\ell r^\ell + a_{\ell-1}r^{\ell-1} + \cdots + a_2r^2 + a_1r^1 + a_0 \\ = (a_\ell r^{\ell-1} + a_{\ell-1}r^{\ell-2} + \cdots + a_2r + a_1)r + a_0$$

の 2 桁以上は r で割り切れる。

$$a_{整数} = qr + a_0$$

$$a_{整数} \div r = q \text{ あまり } a_0$$

但し、

$$q = (a_\ell r^{\ell-1} + a_{\ell-1}r^{\ell-2} + \cdots + a_2r + a_1)$$

この性質 5 から次が言える。

r 進数の計算方法１：整数部

r 進数の正の整数部

$$a_{整数} = a_\ell r^\ell + a_{\ell-1}r^{\ell-1} + \cdots + a_2r^2 + a_1r^1 + a_0 \\ = (a_\ell r^{\ell-1} + a_{\ell-1}r^{\ell-2} + \cdots + a_2r + a_1)r + a_0$$

に対して、a_i 達は以下のアルゴリズムで計算できる。

1. q_0 を $a_{整数}$ とする。
2. q_0 を r で割って、商を q_1 とすると，その余りは a_0 となる。
$$q_0 \div r = q_1 \text{あまり } a_0$$
ここで $q_1 = (a_\ell r^{\ell-1} + a_{\ell-1}r^{\ell-2} + \cdots + a_2r + a_1)$
3. q_1 を r で割って、商を q_2 とすると，その余りは a_1 となる。
$$q_1 \div r = q_2 \text{あまり } a_1$$
ここで $q_2 = (a_\ell r^{\ell-2} + a_{\ell-1}r^{\ell-3} + \cdots + a_3r + a_2)$
4. q_2 を r で割って、商を q_3 とすると，その余りは a_2 となる。
$$q_2 \div r = q_3 \text{あまり } a_2$$
ここで $q_3 = (a_\ell r^{\ell-2} + a_{\ell-1}r^{\ell-4} + \cdots + a_3)$
5. 得られる商や余りが共にゼロになるまで、これを繰り返す

r 進数の性質６：小数部の特徴

r 進数の正の小数部

$a_{小数} = a_{-1}r^{-1} + a_{-2}r^{-2} + a_{-3}r^{-3} + \cdots + a_{-m}r^{-m}$

は r すると小数部一桁部分が整数となる

$$a_{小数} \times r = a_{-1} + q$$

但し、$q < 1$ かつ

$$q = (a_{-2}r^{-1} + a_{-3}r^{-2} + \cdots + a_{-m}r^{-m+1})$$

この性質６から次が言える。

r 進数の計算方法２：小数部

r 進数の正の小数部 $a_{小数}$ を r 倍すると

$$\begin{aligned} & a_{小数} \times r \\ & = a_{-1} + (a_{-2}r^{-1} + a_{-3}r^{-2} + \cdots + a_{-m}r^{-m+1}) \\ & = a_{-1} + (a_{-2}r^{-2} + a_{-3}r^{-3} + \cdots + a_{-m}r^{-m}) \times r \end{aligned}$$

に対して、a_i 達は以下のアルゴリズムで計算できる。

1. q_0 を $a_{小数}$ とする。
2. q_0 に r を掛けて、その小数部を q_1 とすると、その整数部は a_{-1} となる。
$$q_0 \times r = a_{-1} + q_1$$
ここで $q_1 = (a_{-2}r^{-1} + a_{-3}r^{-2} + \cdots + a_{-m}r^{-m+1}) < 1$
3. q_1 に r を掛けて、その小数部を q_2 とすると、その整数部は a_{-2} となる。
$$q_1 \times r = a_{-2} + q_2$$
ここで $q_2 = (a_{-3}r^{-1} + a_{-4}r^{-2} + \cdots + a_{-m}r^{-m+2}) < 1$
4. q_2 に r を掛けて、その小数部を q_3 とすると、その整数部は a_{-3} となる。
$$q_2 \times r = a_{-3} + q_3$$
ここで $q_3 = (a_{-4}r^{-1} + a_{-5}r^{-2} + \cdots + a_{-m}r^{-m+3}) < 1$
5. 得られる整数部や小数部が共にゼロになるまで、これを繰り返す

まとめ：s 進数から r 進数への変換（計算法）

1. 正の実数 a が与えらえたら整数部 $a_{整数}$ と小数部 $a_{小数}$ に分解する。（それぞれを別々に考えること）
2. 計算法１により整数部を求める
3. 計算法２により小数部を求める

s 進数から r 進数への変換（計算法）例

$x = (301.25)_{10}$, $r = 16$ のとき

1. x の整数部 $y = 301$ と x の少数部 $z = 0.25$ を考える
2. 16 進数の場合は 10 以降を
$10 = a$, $11 = b$, $12 = c$, $13 = d$, $14 = e$, $15 = f$,
と書くとした事を思い出す。
3. $y = (12d)_{16}$ なぜならば：
   (a) $301 \div 16 = 18$ あまり　13、(13=d)
   (b) $18 \div 16 = 1$ あまり　2
   (c) $1 \div 16 = 0$ あまり　1 より
4. $z = (0.4)_{16}$ なぜならば：
   (a) $0.25 \times 16 = 4$
5. よって、整数部、少数部を合わせて $x = (301.25)_{10} = (12d.4)_{16}$

2 進数と 16 進数への変換（計算法）の注意

$r = 16$ のとき

$$x = a_3 16^3 + a_2 16^2 + a_1 16 + a_0$$

において、各 $a_i = 0, 1, 2, \ldots, 15$
ここで $2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 15$ に注意するとそれぞれ a_i は
$$a_i = a_{i3}2^3 + a_{i2}2^2 + a_{i1}2 + a_{i0}$$
(各 $a_{ij} = 0, 1$) とできる。また $16 = 2^4$ に注意すると

$$\begin{aligned} x = & (a_{33}2^3 + a_{32}2^2 + a_{31}2 + a_{30})16^3 \\ & + (a_{23}2^3 + a_{22}2^2 + a_{21}2 + a_{20})16^2 \\ & + (a_{13}2^3 + a_{12}2^2 + a_{11}2 + a_{10})16 \\ & + (a_{03}2^3 + a_{02}2^2 + a_{01}2 + a_{00})16 \end{aligned}$$

となるので、16 進数の各桁が、２進数の４桁ずつで対応させて計算すればよい。

2　剰余数

剰余数

N を正の整数とする。
二つの整数 a と b に対して、
「$a \equiv b \bmod N$」とは、$a \div N$ の余りが $b \div N$ の余りと一致するときとする

剰余数の例

1. $N = 7$ のとき $0 \equiv 7 \equiv 14 \equiv 21 \bmod 7$,
$2 \equiv 9 \equiv 16 \equiv 23 \bmod 7$,
$2 - 2 \equiv 2 + 5 \equiv 2 + 12 \bmod 7$,
2. $N = 5$ のとき $0 \equiv 5 \equiv 10 \equiv 15 \bmod 5$,
$2 \equiv 7 \equiv 12 \equiv 17 \bmod 5$,
$2 - 2 \equiv 2 + 3 \equiv 5 \bmod 5$,

3　補数の計算

補数

r 進数を考える。

1. ある数 a の r の補数とは
   $N = r^n$ とする数が存在し ($N-1$ を最大数と呼ぶ）$N-a$ のことである。
2. ある数 a の $r-1$ の補数とは
   $N = r^n - 1$ とする最大数が存在し、$N-a$ のことである。

どちらも $-a \equiv N - a \bmod N$ の事である。

補数の例

1. 10 進数を考える。
   (a) ある数 a の 10 の補数とは
   $N = 10^n$ とする数（最大数 $N-1 = 99\cdots9$）が存在し、$10^n - a$ のことである。
   (b) ある数 a の 9 の補数とは
   $N = 10^n - 1$ とする最大数が存在し、$N-a$ のことである。
2. 2 進数を考える。
   (a) ある数 a の 2 の補数とは
   $N = 2^n$ とする最大数が存在し、$2^n - a$ のことである。
   (b) ある数 a の 1 の補数とは
   $N = 2^n - 1$ とする最大数が存在し、$N-a$ のことである。

4　2 進数の補数の計算テクニック版

2 進数の補数の計算方法

1. 1 の補数　最大数は $(111111)_2$ とする
   例 $a = (011001)_2$ に対して 0 と 1 を逆にする $(100110)_2$
2. 2 の補数　最大数は「$(111111)_2 + (000001)_2$」とする
   例 $a = (011001)_2$ に対して 0 と 1 を逆にしたもの $(100110)_2$ に $(000001)_2$ を足す。
   つまり、$(100111)_2$