数学特論／数理科学 I　松谷茂樹

A　集合

A.1　集合:ミニマム

集合とは "点の集まり" のことである。A が集合であり，x がその**元**であるとき，x は A に**属する**といい，

$$x \in A \quad \text{または} \quad A \ni x$$

と記す。x が A に属しないとき $x \notin A$ と記す。

集合 A の元が，ある自然数 n が存在し $x_1, x_2, \ldots, x_n$ のみである場合は

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

と記す。また、各要素が互いに異なる場合 $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ の場合、$|A| = n$ と記す。

集合 A の元が，無限個の元 $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ (但し、$x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$）から成る場合は

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

と記す。

$n = 0$ の場合を**空集合**と呼び、$\emptyset$ と記す。

定義 A.1 x が性質 P をもち際に、性質 P を持つ要素 x のなす要素全体の集合を

$$\{x \mid P(x)\}$$

と記す。

以下、重要な集合に記号を付与する

1. $\mathbb{Z} := \{x \mid x \text{ は整数 }\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
2. $\mathbb{N} := \{x \mid x \text{ は自然数 }\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
3. $\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ は実数 }\}$
4. $\mathbb{C} := \{x \mid x \text{ は複素数 }\}$
5. $\mathbb{Q} := \{x \mid x \text{ は有理数 }\}$

A.2　集合記号

定義 A.2 集合 A の元がすべて集合 B の元である場合、A は B の**部分集合**と呼び、A は B に**含まれる**、B は A を**含む**と言い

$$A \subset B \quad \text{または} \quad B \supset A$$

と記す。

$A \subset B$ でかつ $B \subset A$ のとき $A = B$ と記す。また、そうでない場合は $A \neq B$ と記す。

$A \subset B$ でかつ $A \neq B$ のとき、$A \subsetneq B$ と記す。

集合間にある自然な集合和，集合積，集合差について記しておく．集合 X と Y に対して，

1. **集合和**は $X + Y \equiv X \cup Y := \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$，
2. **集合積**は $XY \equiv X \cap Y := \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \in Y\}$，
3. **集合差**は $X - Y \equiv X \setminus Y := \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \notin Y\}$，

となる．

$X(Y + Z) = XY + XZ$ 等の等号が成り立つが，集合差は $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$ となり交わった部分のところだけが削られるので，例えば $\emptyset - Y = \emptyset$ や一般に $X - (Y - Z) \neq X + (Z - Y)$ となる．

X の部分集合 U に対して U の（X での）U の**補集合** U^c は $U^c \equiv X \setminus U$ となる．

A.3　同値関係と同値類 [付録 A:1]

同値関係とは，集合 X に同値関係 $\sim$ があるとは X の任意の 2 元 x, y が関係 $x \sim y$ を満たすか，満たさない（$x \not\sim y$）かが定まり，任意の $x, y, z \in X$ に対して，関係が i）$x \sim x$ (反射律)，ii）$x \sim y$ ならば $y \sim x$(対称律)， iii）$x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$(推移律)）を満たすことである．

そもそも同値関係などの X における**関係**とは $X \times X$ に対して関係が満たすものを選ぶことで $X \times X$ の部分集合，例えば $\{(x, y) \in X \times Y \mid x \sim y\}$ を選択していることと同じである．

集合 X に対して，同値関係 $\sim$ があるときに X の元 a に対して，a の**同値類**:

$$[a] := \{b \in X \mid b \sim a\}$$

とする．

$[a]$ は X の部分集合 $([a] \subset X)$,（つまり、べき集合 $\wp(X)$ の元 $([a] \in \wp(X))$ である.）$[a] \ni b$ に対して $[a] = [b]$ という関係が成立します．このように a の同値類 $[a]$ は表現の仕方の数は $[a]$ の元の数だけあり，任意性がある．それでも $[a]$ を $[a]$ とか $[b]$ とかで，代表することができるので，この a や b を同値類の代表元と呼ぶ．同値関係の定義より，$a, c \in X$ に対して，$[a]$ と $[c]$ は $[a] = [c]$ または $[a] \cap [c] = \emptyset$ となる．つまり，同じか異なるかということであるので $X = \bigcup_i [a_i]$，但し $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset$ とできる．このような類の集合を，**商集合**と呼び，

$$X/\sim := \{[a] \mid a \in X\}$$

と定義する．**X を関係 $\sim$ で割った空間**と呼ぶ．

例えば $X_a := \{$ あ, い, う, え, お, か, き, く, け, こ, さ, し, す, せ, そ $\}$ で あ $\sim$ い $\sim$ う $\sim$ え $\sim$ お, か $\sim$ き $\sim$ く $\sim$ け $\sim$ こ, さ $\sim$ し $\sim$ す $\sim$ せ $\sim$ そ とした場合，[あ] $= \{$ あ, い, う, え, お $\}$, [き] $= \{$ か, き, く, け, こ $\}$, [そ] $= \{$ さ, し, す, せ, そ $\}$ であるし，[あ] $=$ [う] $=$ [お] である．$X_a/\sim = \{$[あ], [い], $\ldots$, [せ], [そ]$\} = \{$[あ], [く], [し]$\}$ となる．これは $\{$ あ, か, さ $\}$ と考えてもよいので，多くの商集合は通常の集合のように取り扱うことができる．

A.4 大小関係

大小関係の一般化したものとして順序というものがある．集合 X に**順序**（**半順序**）$\le$ を持つとは $X \times X$ の元と $\le$ により真偽が定まり，

1. すべての $x \in X$ に対して $x \le x$ (**反射律**)
2. $x, y \in X$ で $x \le y$ で $y \le x$ ならば $x = y$ (**反対称律**)
3. $x, y, z \in X$ で $x \le y$ で $y \le z$ ならば $x \le z$ (**推移律**)

を満たすことである．順序を持つ集合のことを**順序集合**と呼ぶ．

順序集合は必ずしも 2 元に大小関係が定まるとは限らない.（その場合 $U \le V$ も $V \le U$ も満たされない（偽）と見なす.）

他方，順序集合 X で，そのどんな 2 元をとっても大小関係 $x \le y$ か $y \le x$ が定まる場合，X を**全順序集合**と呼ぶ．全順序集合は一列に並んでいるということを意味するので，例えば $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{R}$ やそれらの部分集合などが全順序集合となる．

また，$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{R}$ やそれらの部分集合によってパラメータ化されている集合も順序関係をパラメータの順序と整合よく持てば全順序集合となる．

全順序に対して，上記の順序をより明示的に**半順序**と呼ぶことがある．

その際，順序集合を**半順序集合**，**poset** (partial ordered set) と呼んだりもする．半順序集合としては，フィルター付き K ベクトル空間やフィルター環やフィルター加群，位相空間などがその例となり，豊富な数学的構造を持つこととなる．

A.5 逆像

ここでは連続，同相，可測の概念を定義する際に必要となる**逆像**というものを導入する．

$f : X \to Y$ を集合間の写像としたときに，$Y \supset U$ に対して $f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ を U の**逆像**という．

逆像は，逆写像とは異なる概念である．f は全単射である必要はない．

逆像 $f^{-1}(U)$ は f が写像でありさえすれば定義でき，f の像 $f(X) \subset Y$ に対して，$f^{-1}(U) = f^{-1}(U \cap f(X))$ となる．付録 A で見たように逆像は極めて重要な現代数学のアイテムで，重要な役割を果たす．

f が全単射のとき $Y \ni y$ に対して $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$ は**逆写像**に一致する．

A.6 無限大

無限大について少し述べてく．ある数 $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が無限か有限かの区別は，例えば $a = a + 1$ を満たすか否かと言える．等号が成り立てば無限，成り立たなければ有限ということである．

集合 X に対して，X から自然数全体 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ へ全単射が（ひとつでも）存在すれば，集合 X が**可算無限**といい，X を**可算無限集合**と呼ぶ．

無限集合で可算無限でないものは**非可算**または**非可算無限**という．$\mathbb{N}$ の部分集合（$\mathbb{N}$ 自身も含め）と全単射写像が存在する場合は**可算**と言う.（本によっては，可算を可算無限に当て，本書の可算を「有限または可算」と記載するものもある.）

$\mathbb{N}$ や $5\mathbb{N} := \{5x \mid x \in \mathbb{N}\}$ などは可算無限集合となる．更には，整数全体 $\mathbb{Z}$ や有理数全体 $\mathbb{Q}$ なども可算無限集合となる．$\mathbb{Q}$ は少し議論が必要ではあるが，$\mathbb{Z}$ の場合は $\lfloor x \rfloor$ を x を超えない最大の整数とすると $\mathbb{Z} = \{(-1)^i \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \mid i \in \mathbb{N}\}$ となる．

非可算集合の例としては，例えば実数全体 $\mathbb{R}$ がある．$\mathbb{R}$ が非可算集合である事を少し眺めよう．

もしも，全単射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ があったとして矛盾を導く．つまり，$\alpha(i) := (\tanh(f(i)) - 1)/2$ とすると $\alpha : \mathbb{N} \to (0, 1)$ であり，10 進法で各 $a_{i,j} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ とすると

$$\begin{aligned}
\alpha(1) &= 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots \\
\alpha(2) &= 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots \\
\alpha(3) &= 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots \\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{1}$$

という対応があるということである．このとき，対角成分 $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \cdots$ に着目し $b_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ を $b_i \neq a_{i,i}$ とするように選び，$\beta := 0.b_1b_2b_3\cdots$ としよう．β は α の像 $\mathrm{Img}(\alpha) \equiv \{\alpha(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ に含まれず $(0, 1)$ の元であるため，α 即ち f が全射でないことを意味し，上記の仮定に矛盾があることが判る．このような $a_{i,i}$ に着目する手法を**対角線論法**という．