Jacobi inversion formulae for a trigonal curve $y^3 = x^2 k(x)$

松谷茂樹・米田二良・Emma Previato

佐世保高等工業専門学校・神奈川工科大学・ボストン大学

2016 年 9 月 16 日

本日のメニュー

1. 研究の目的
2. Weierstrass 正規形式（標準形）とヤコビの逆公式
3. 特異曲線 $y^3 = x^2 k(x)$
4. ヤコビの逆公式：リーマン定数、アーベル写像
5. シフトしたリーマン定数、シフトしたアーベル写像
6. 特異曲線でのヤコビの逆公式

研究の目的

代数曲線の σ 関数の研究の目的：

『楕円関数（楕円曲線のアーベル関数）が明示的な表現を持つことで「理論物理，整数論，工学」の発展に寄与したように，「理論物理，整数論，工学」の発展に寄与できるよう，楕円関数と同レベルの具体性を持つ代数曲線上のアーベル関数論を再構築する』

19 世紀 具象	→	20 世紀 抽象	→	21 世紀 抽象＋具象

研究の目的

楕円曲線の σ 関数：

『楕円関数の理論』
『楕円曲線の代数的な性質と，楕円関数（楕円曲線のアーベル関数）の解析的な性質との両方を理解すること』

$y^2 = (x - b_0)(x - b_1)(x - b_2)$ 標準形 代数的な性質	$\Leftrightarrow$	トーラス σ 関数／$\mathbb{C}$ 上の整関数 解析的な性質

代数曲線の σ 関数の研究の目的：

『楕円関数（楕円曲線のアーベル関数）が明示的な表現を持つことで「理論物理，整数論，工学」の発展に寄与したように，
「理論物理，整数論，工学」の発展に寄与できるよう，楕円関数と同レベルの具体性を持つ代数曲線上のアーベル関数論を再構築する』

Weierstrass 正規形式（標準形）

(X, P):点付き閉リーマン面　$P = \infty$
(X, P) を P での Weierstrass 空隙列に着目して定義する代数方程式のことを **Weierstrass 正規形式 (normal form)**（Weierstrass 標準形）と呼ぶ.

Weierstrass 列

(X, P) のる Weierstrass 空隙列の $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ での補集合を **Weierstrass 列**と呼び $N_X(P) \subset \mathbb{N}_0$ と書く
$N_X(P)$ が数値半群で記述される.

Weierstrass 正規形式（標準形）

Weierstrass 正規形式（Baker, 加藤崇雄）

r を $N_X(P)$ の最小元とした際に X は，ある正の整数 s 存在し $(r, s) = 1$,

$$y^r + A_1(x)y^{r-1} + \cdots + A_{r-1}(x)y + A_r(x) = 0$$

と定義される．ここで，$A_j(x)$ $(j = 1, \ldots, r-1)$ は次数は $< js/r$ で，$A_r(x)$ は s 次多項式.

巡回的 Weierstrass 正規形式（標準形）

巡回的 Weierstrass 正規形式

本報告では Weierstrass 正規形式の中でも，

$$y^r = f_s(x), \quad f_s(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - b_i)$$

r, s: 正整数（$r < s$ で $(r, s) = 1$）を考える

$C_{a,b}$, (r, s)-曲線　非特異な巡回的 Weierstrass 正規形式

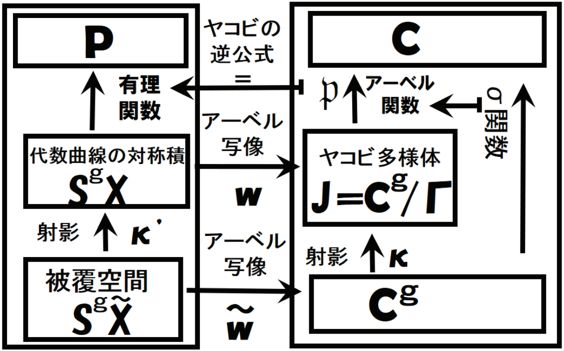
$b_i \in \mathbb{C}$ は互いに異なるとき曲線

$$X := X_{r,s} := \left\{(x, y) \mid y^r = f_s(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - b_i)\right\} \cup \{\infty\}$$

は非特異曲線になる．

非特異な巡回的 Weierstrass 正規形式

これらに関しては，ヤコビの逆問題は解けている
（MP JMSJ 2008,2014)



ヤコビの逆公式：リーマン定数，アーベル写像

Theorem:一般の閉リーマン面 X で成り立つ定理（Lewittes 1964）：

X: 一般の閉リーマン面　種数 g
$w : S^k X \to \mathbb{C}^g$ アーベル写像　基点は ∞ 点
ξ: リーマン定数
$\mathcal{K}_X$ ：標準形式
θ ：リーマン θ 関数

1. テータ因子 Θ :=div(θ) と標準テータ因子 $w(S^{g-1}X)$ の関係：

$$\Theta = w(S^{g-1}X) + \xi \quad \mathrm{mod} \quad \Gamma$$

つまり，$P_i \in X$ に対して，$\theta(w(P_1, \ldots, P_{g-1}) + \xi) = 0$ となる．

2. 標準因子 $\mathcal{K}_X$ との対応：

$$w(\mathcal{K}_X) + 2\xi = 0 \ \mathrm{mod}\ \Gamma$$

ただし Γ は格子

巡回的 Weierstrass 正規形式（標準形）

Theorem: 特殊な閉リーマン面で成り立つ定理（Lewittes 1964）：

閉リーマン面 X s.t. $\mathcal{K}_X = 2(g-1)\infty$ に対して次が成り立つ：

1. 標準因子 $\mathcal{K}_X$ との対応： $(w(\mathcal{K}_X) + 2\xi = 0 \bmod \Gamma)$
$$2\xi = 0 \bmod \Gamma \quad \Rightarrow \quad \xi \text{ が半周期となる}$$
2. 対応するテータ特性類が存在する，i.e., $\xi \Leftrightarrow \exists \begin{bmatrix} \delta'' \\ \delta' \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}/2)^{2g}$

σ 関数の存在

このとき $\mathbb{C}^g$ 上の整関数である σ 関数が定義できる：

$$\sigma(u) = c e^{-\frac{1}{2}\,{}^t u \eta' \omega'^{-1} u} \sum_{n \in \mathbb{Z}^{2g}} \mathrm{e}^{\left[\pi\sqrt{-1}\left\{ {}^t(n+\delta'')\omega'^{-1}\omega''(n+\delta'') + {}^t(n+\delta'')(\omega'^{-1}u+\delta')\right\}\right]}$$

と定義できる．c は適当な非零の定数である．
このとき，σ はモデュラー変換に不変

特異 Weierstrass 正規形式（標準形）

特異代数曲線 X_{sing}

本報告では

$$y^3 = \prod_{i=0}^{s+1}(x - b_i) = (x - b_0)(x - b_1)\cdots(x - b_{s+1})$$

$b_{s+1} \to b_0 = 0$ のとき，

$$y^3 = x^2 k(x)$$

を考える． $k(x) = (x - b_1)(x - b_2)\cdots(x - b_s)$

$$X_{\text{sing}} \quad : \quad y^3 = x^2 k(x)$$

となる． X_{sing} は特異曲線となる．

正規化

可換環

$$R = \mathbb{C}[x,y]/(y^3 - x^2k(x))$$

を正規化する

$$\hat{R} = \mathbb{C}[x,y,z]/(y^2 - xz, zy - xk(x), z^2 - k(x)y)$$

つまり

$$X = \{(x,y,z) \mid y^2 = xz, zy = x, z^2 = k(x)y\} \cup \{\infty\}$$

を満たす空間曲線 X を考察する
各分岐点を $B_0, B_1, B_2, \cdots, B_s$ とする． $B_0 := (x = 0, y = 0, z = 0)$
正規化：$X \to X_{\mathrm{sing}}$

Weierstrass 列

曲線の無限遠点での Weierstrass 列:

$s\backslash i$	wt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	ϕ_i	1	-	-	x	y	z	x^2	xy	xz	yz	x^2y	x^2z
3	ϕ_i	1	-	-	x	-	y	x^2	z	xy	x^3	xz	x^2y
5	ϕ_i	1	-	-	x	-	-	x^2	y	-	x^3	xy	z

$\mathbb{C}$ ベクトル空間として

$$\hat{R} = \bigoplus_{i=0} \mathbb{C}\phi_i$$

wt: 無限遠点での局所パラメータによる極の位数による重み

$$\mathrm{wt}(x) = 3, \mathrm{wt}(z) = s + 2, \mathrm{wt}(y) = 2s + 1$$

種数 $g = s$, $\quad \mathcal{K}_X = (2g - 2 - s)\infty + (B_1 + \cdots + B_s) \neq (2g - 2)\infty$

ヤコビの逆公式：リーマン定数，アーベル写像

Theorem:一般の閉リーマン面で成り立つ定理（Lewittes 1964)：

$w : S^k X \to \mathbb{C}^g$ アーベル写像
ξ: リーマン定数
$\mathcal{K}_X$ ：標準形式

1. テータ因子 $\Theta :=\mathrm{div}(\theta)$ と標準テータ因子 $w(S^{g-1}X)$ の関係：
$$\Theta = w(S^{g-1}X) + \xi \mod \Gamma$$
つまり，$P_i \in X$ に対して，$\theta(w'(P_1, \ldots, P_{g-1}) + \xi_s) = 0$ となる．
2. 標準因子 $\mathcal{K}_X$ との対応：
$$w(\mathcal{K}_X) + 2\xi = 0 \text{ mod } \Gamma$$
ただし Γ は格子

ヤコビの逆公式：リーマン定数，アーベル写像

$\mathcal{K}_X = (2g-2-s)\infty + (B_1 + \cdots + B_s) \neq (2g-2)\infty$

1. $w(\mathcal{K}_X) \neq 0 \bmod \Gamma$. $\Rightarrow$ $2\xi \neq 0 \bmod \Gamma$
   $\Rightarrow$ リーマン定数 ξ は半周期とならない
2. テータ因子 $\Theta :=\mathrm{div}(\theta)$ と標準テータ因子 $w(S^{g-1}X)$ の関係
   $$\Theta = w(S^{g-1}X) + \xi \mod \Gamma$$
3. θ 特性類（半周期）が定義できない
   $\to\sigma$ 関数をうまく定義できない.
   $\to$ヤコビの逆公式が複雑になる.

ヤコビの逆公式：リーマン定数，アーベル写像

$\mathcal{K}_X = (2g-2-s)\infty + (B_1 + \cdots + B_s) \neq (2g-2)\infty$

$(B_1 + \cdots + B_s) - s\infty \sim -2B_0 + 2\infty$ (div(y) より)

1. $w(\mathcal{K}_X) = -w(2B_0)$ より $-2w(B_0) + 2\xi = 0 \mod \Gamma$ となる.
2. リーマン定数 ξ は半周期とならないが，
   $\xi_s := \xi - w(B_0)$ は半周期となる.
3. テータ因子 $\Theta :=$div(θ) と標準テータ因子 $w(S^{g-1}X)$ の関係：

$$\Theta = w(S^{g-1}X) + \xi \mod \Gamma$$

4. θ 特性類（半周期）が定義できない
   $\rightarrow \sigma$ 関数をうまく定義できない.
5. $\rightarrow$ ヤコビの逆公式が複雑になる.

ヤコビの逆公式：リーマン定数，アーベル写像

$\mathcal{K}_X = (2g-2-s)\infty + (B_1 + \cdots + B_s) \neq (2g-2)\infty$

$(B_1 + \cdots + B_s) - s\infty \sim -2B_0 + 2\infty$ (div(y) より)

1. $w(\mathcal{K}_X) = -w(2B_0)$ より $-2w(B_0) + 2\xi = 0 \mod \Gamma$ となる．
2. リーマン定数 ξ は半周期とならないが，
   $\underline{\xi_s := \xi - w(B_0)}$ は半周期となる．
3. テータ因子 $\Theta :=$div(θ) と標準テータ因子 $w(S^{g-1}X)$ の関係：
   $\underline{\Theta = w(S^{g-1}X) + \xi \mod \Gamma} \Rightarrow$

$$\Theta = w(S^{g-1}X) + w(B_0) + (\xi - w(B_0)) \mod \Gamma$$

4. θ 特性類（半周期）が定義できない
   $\rightarrow \sigma$ 関数をうまく定義できない．
5. $\rightarrow$ヤコビの逆公式が複雑になる．

ヤコビの逆公式：リーマン定数，アーベル写像

$\mathcal{K}_X = (2g-2-s)\infty + (B_1 + \cdots + B_s) \neq (2g-2)\infty$

1. $w(\mathcal{K}_X) = -w(2B_0)$ より $-2w(B_0) + 2\xi = 0 \mod \Gamma$ となる.
2. リーマン定数 ξ は半周期とならないが，
$\xi_s := \xi - w(B_0)$ は半周期となる.
3. アーベル写像をシフトして $w_s(D) := w(D) + w(B_0)$ とすると

$$\Theta = w_s(S^{g-1}X) + \xi_s \mod \Gamma$$

$P_i \in X$ に対して，$\theta(w_s(P_1, \ldots, P_{g-1}) + \xi_s) = 0$

4. θ 特性類（半周期）が定義できる
→ σ 関数を定義できる?!
5. →ヤコビの逆公式が簡単になる?!

ヤコビの逆公式:シフトしたリーマン定数, アーベル写像

Theorem

1. $w(\mathcal{K}_X) = -w(2B_0)$ より $-2w(B_0) + 2\xi = 0 \ mod\, \Gamma$ となる.
2. リーマン定数 ξ は半周期とならないが,
   $\xi_s := \xi - w(B_0)$ は半周期となる：シフトしたリーマン定数
3. $w_s(D) := w(D) + w(B_0)$：シフトしたアーベル写像とすると
   $$\Theta = w_s(S^{g-1}X) + \xi_s \quad mod \quad \Gamma$$
   $P_i \in X$ に対して，$\theta(w_s(P_1, \ldots, P_{g-1}) + \xi_s) = 0$
4. θ 特性類（半周期）が定義できる

(KMP Archiv der Mathematik 2016)

自然な

シフトしたアーベル写像は自然なものか？

自然な

シフトしたアーベル写像は自然なものか？

i.e., シフトしたアーベル写像の和は、代数的か？

自然な

シフトしたアーベル写像は自然なものか？

i.e., シフトしたアーベル写像の和は、代数的か？

答えはYes！

自然な

シフトしたアーベル写像は自然なものか？

i.e., シフトしたアーベル写像の和は、代数的か？

答えはYes！

まずはアーベル写像を作る！

切断系列

切断系列 $\hat{R}^B \subset \hat{R}$

$$\hat{R}^B := \{h \in R \mid \exists \ell, \text{ such that } (h) - (B_0 + B_1 + \cdots + B_s) + \ell\infty > 0\}$$

を導入する．これは $\hat{R}^B = \oplus_{i=0}\mathbb{C}\hat{\phi}_i$ とする分解を持つ．

曲線の無限遠点での Weierstrass 列:

$s\backslash i$	wt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	ϕ_i	1	-	-	x	y	z	x^2	xy	xz	yz	x^2y	x^2z
2	$\hat{\phi}_i$	-	-	-	-	y	z	-	xy	xz	yz	x^2y	x^2z
3	ϕ_i	1	-	-	x	-	y	x^2	z	xy	x^3	xz	x^2y
3	$\hat{\phi}_i$	1	-	-	-	-	y	-	z	xy	-	xz	x^2y
5	ϕ_i	1	-	-	x	-	-	x^2	y	-	x^3	xy	z
5	$\hat{\phi}_i$	1	-	-	-	-	-	-	y	-	-	xy	z

微分形式

第一種，第二種微分

1. 第一種微分（正則一形式）

$$\nu^{\mathrm{I}}{}_i = \frac{\hat{\phi}_{i-1}dx}{3yz}, \quad (i = 1, 2, \cdots, g), \quad H^0(X, \Omega^1) = \sum_i^g \mathbb{C}\ \nu^{\mathrm{I}}{}_i$$

$((\hat{\phi}_0 : \hat{\phi}_1 : \cdots : \hat{\phi}_{s-1})$ 標準埋め込み$)$

$$\mathcal{K}_X = 2g\infty - 2B_0 \sim 2(g-1)\infty + (B_1 + \cdots B_r)$$

2. 第二種微分:

$$\nu^{\mathrm{II}}{}_i = \frac{\sum_j a_{ij}\hat{\phi}_j dx}{3yz}, \quad (i = 1, 2, \cdots, g)$$

周期行列

周期積分

1. 周期積分:

$$\omega' := \left(\int_{\alpha_i} \nu^{\mathrm{I}}{}_j\right), \quad \omega'' := \left(\int_{\beta_i} \nu^{\mathrm{I}}{}_j\right),$$

$$\eta' := \left(\int_{\alpha_i} \nu^{\mathrm{II}}{}_j\right), \quad \eta'' := \left(\int_{\beta_i} \nu^{\mathrm{II}}{}_j\right),$$

2. 格子　$\Gamma := \langle \omega', \omega'' \rangle_{\mathbb{Z}}$
3. ヤコビ多様体：$\kappa : \mathbb{C}^g \to \mathcal{J} := \mathbb{C}^g / \Gamma$

アーベル写像

アーベル写像

$\hat{X}$: X のアーベル的普遍被覆 $p : \hat{X} \to X$

$$\tilde{w}(P) := \omega'^{-1}\tilde{v}(P), \quad \hat{v}(P) = \int_\infty^P p_*\nu^{\mathrm{I}}, \quad \hat{v} : \hat{X} \to \mathbb{C}^g$$

$$w(P) := \omega'^{-1}v(P), \quad v(P) = \kappa(\int_\infty^P p_*\nu^{\mathrm{I}}), \quad v : X \to \mathcal{J}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "v"] & \mathcal{J} = \mathbb{C}^g/\Gamma \\ \hat{X} \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\hat{v}"] & \mathbb{C}^g \arrow[u, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

アーベル写像

$$\tilde{w} := \omega'^{-1}\tilde{v}, \quad w := \omega'^{-1} v$$

$$\tilde{v}(P_1, \ldots, P_k) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{v}(P_i), \quad v(P_1, \ldots, P_k) = \sum_{i=1}^{k} v(P_i) \bmod \Gamma.$$

$$\begin{tikzcd} S^k X \arrow[r, "v"] & \mathcal{J} = \mathbb{C}^g/\Gamma \\ S^k \hat{X} \arrow[u, "\kappa'"] \arrow[r, "\hat{v}"] & \mathbb{C}^g \arrow[u, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

シフトしたアーベル写像

$$\tilde{v}_s(P_1, .., P_k) = v(P_1, .., P_k, B_0), \quad v_s(P_1, .., P_k) = v(P_1, .., P_k, B_0).$$

σ 関数

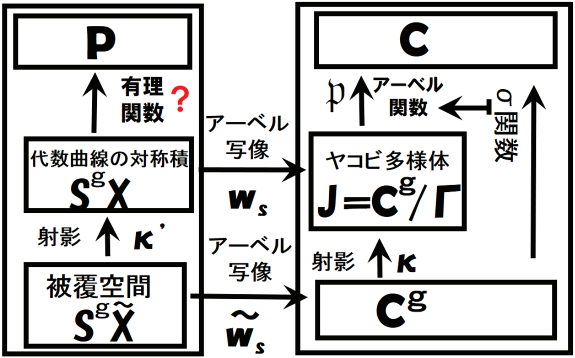
この ξ_s の対応する半格子点を $\begin{bmatrix}\delta'' \\ \delta'\end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}/2)^{2g}$ と記すと $\mathbb{C}^g$ 上の整関数である σ 関数を

$$\sigma(u) = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ {}^t u\eta'\omega'^{-1}\ u} \sum_{n\in\mathbb{Z}^{2g}} \mathrm{e}\left[\pi\sqrt{-1}\left\{\ {}^t(n+\delta'')\omega'^{-1}\omega''(n+\delta'') +\ {}^t(n+\delta'')(\omega'^{-1}u+\delta')\right\}\right]$$

と定義できる．c は適当な非零の定数である．

特異な巡回的 Weierstrass 正規形式

シフトしたアーベル写像が定義された：



切断系列

切断系列 $\hat{R}^B \subset \hat{R}$

$$\hat{R}^B := \{h \in R \mid \exists \ell,\ \text{such that } (h) - (B_0 + B_1 + \cdots + B_s) + \ell\infty > 0\}$$

を導入する．これは $\hat{R}^B = \oplus_{i=0}\mathbb{C}\hat{\phi}_i$ とする分解を持つ．

曲線の無限遠点での Weierstrass 列:

$s\backslash i$	wt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	ϕ_i	1	-	-	x	y	z	x^2	xy	xz	yz	x^2y	x^2z
2	$\hat{\phi}_i$	-	-	-	-	y	z	-	xy	xz	yz	x^2y	x^2z
3	ϕ_i	1	-	-	x	-	y	x^2	z	xy	x^3	xz	x^2y
3	$\hat{\phi}_i$	1	-	-	-	-	y	-	z	xy	-	xz	x^2y
5	ϕ_i	1	-	-	x	-	-	x^2	y	-	x^3	xy	z
5	$\hat{\phi}_i$	1	-	-	-	-	-	-	y	-	-	xy	z

Weierstrass 正規形式での自然な有理関数

切断系列 $\{\hat{\phi}_i\} = \hat{R}^B \subset \hat{R}$ の有理関数

$P_i = (x_i, y_i, z_i) \in X$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して以下を導入

$$\psi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) := \begin{vmatrix} \hat{\phi}_0(P_1) & \hat{\phi}_1(P_1) & \cdots & \hat{\phi}_{n-1}(P_1) \\ \hat{\phi}_0(P_2) & \hat{\phi}_1(P_2) & \cdots & \hat{\phi}_{n-1}(P_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\phi}_0(P_n) & \hat{\phi}_1(P_n) & \cdots & \hat{\phi}_{n-1}(P_n) \end{vmatrix}$$

$$\mu_n(P; P_1, \ldots, P_n) = \frac{\psi_{n+1}(P_1, \ldots, P_n, P)}{\psi_n(P_1, \ldots, P_n)}$$

シフトしたアーベル写像の加法性

切断系列の制限した線形系の加法	$\Leftrightarrow$	シフトとしたアーベル写像の加法

Weierstrass 正規形式での自然な有理関数

シフトしたアーベル写像の加法性の例

$\mathrm{div}\mu_{g-1}(P; P_1, P_2, \ldots, P_{g-1})$ を考察するために
$n = g - 1$ のとき因子 $D = P_1 + \cdots P_{g-1} > 0$，に対して，$D' = P'_1 + \cdots P'_{g-1}$ が存在し，

$$D + D' + (B_0 + \cdots + B_s) - (2g - 2 - s)\infty \sim 0$$

$$D + B_0 - g\infty \sim -(D' + B_0 - g\infty).$$

Theorem

$$[-1]w_s(S^{g-1}X) = w_s(S^{g-1}X)$$

(K-M-P 2013, 2016, 準備中)

ヤコビの逆問題

Theorem

(ヤコビの逆公式) $\wp_{ij}(u) := -\dfrac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}\log\sigma(u)$ に対して,

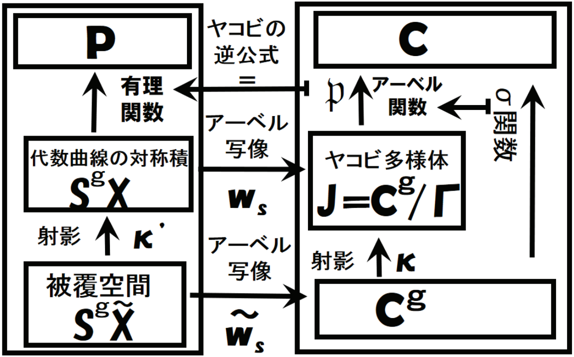
$$\mu_g(P; P_1, \ldots, P_g) = \hat{\phi}_g(P) + \sum_{i=1}^{g}(-1)^{g-i+1}\wp_{gi}(v_s(P_1, \ldots, P_g))\hat{\phi}_{i-1}(P).$$

(K-M-P 2013, 準備中)

シフトされたリーマン定数，シフトされたアーベル写像

特異な巡回的 Weierstrass 正規形式

ヤコビの逆問題が解けた



参考文献

1. KMP1 J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, *The sigma function for Weierstrass semigroup* $\langle 3, 7, 8\rangle$ *and* $\langle 6, 13, 14, 15, 16\rangle$, Int. J. Math., **24** (2013) 1350085.
2. KMP2 J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, *The Riemann constant for a non-symmetric Weierstrass semigroup*, to appear in Archiv der Mathematik 2016
3. KMP3 J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, *Relating algebraic and Abelian functions of pointed curves*, 準備中
4. MK S. Matsutani and J. Komeda, *Sigma functions for a space curve of type (3, 4, 5)*, J. Geom. Symm. Phys., **30** (2013) 75-91.

ご静聴ありがとうございました

切断系列

切断系列 $\hat{R}^B \subset \hat{R}$

$$\hat{R}^B := \{h \in R \mid \exists \ell,\ \text{such that } (h) - (B_0 + B_1 + \cdots + B_s) + \ell\infty > 0\}$$

を導入する．これは $\hat{R}^B = \oplus_{i=0}\mathbb{C}\hat{\phi}_i$ とする分解を持つ．

シフトしたアーベル写像の加法性

切断系列 $\hat{R}^B$ 制限した線形系 可換環の加法的な性質	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{C}^g$ シフトしたアーベル写像 の加法性

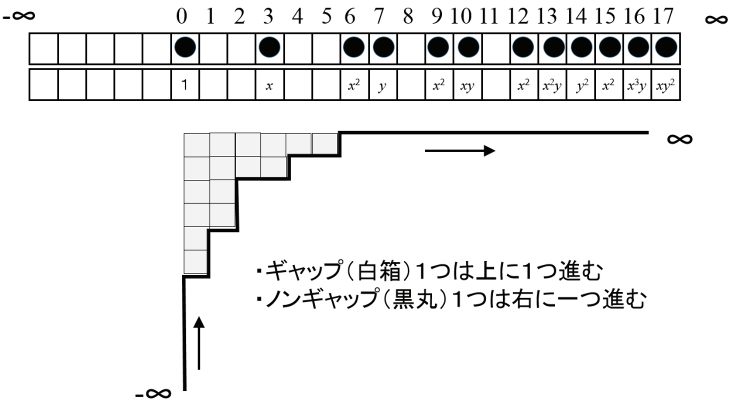
Weierstrass 列：非対称

非対称数値半群とリーマン定数

1. (X,∞) の ∞ での Weierstrass 列が wt が $(2g-1)$ がギャップのとき**対称**と呼ぶ.
   このとき標準因子 $\mathcal{K}_X \sim (2g-2)\infty$
2. (X,∞) の ∞ での Weierstrass 列が wt が $(2g-1)$ がギャップでないとき**非対称**と呼ぶ.
   このとき標準因子 $\mathcal{K}_X \not\sim (2g-2)\infty$

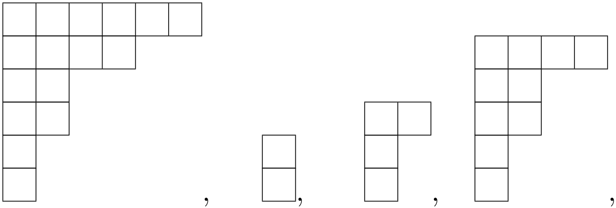
点付きリーマン面の分類

(3,7)曲線



・ギャップ（白箱）1つは上に1つ進む
・ノンギャップ（黒丸）1つは右に一つ進む

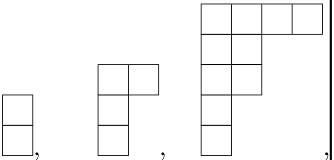
点付きリーマン面の分類とヤング図形



$$(3,7), \quad (3,4,5), \quad (3,5,7), \quad (3,7,11),$$

切断系列

非対称ヤング図形



$(3,4,5)$ $(3,5,7)$ $(3,7,11)$

可換環

$$X = \{(x,y,z) \mid y^2 = xz, zy = x,$$

$$z^2 = k(x)y\} \cup \{\infty\}$$

線形同値として y/z より

$$(2B_0 + B_1 + \cdots + B_s) - (s+2)\infty$$

$$\sim 2B_0 - 2\infty$$

Theorem

リーマン定数 ξ に対して，シフトされたリーマン定数 ξ_s 及び *shift* された *Abel* 写像 v_s を，$P_1, \ldots, P_k \in X$ に対して

$$\xi_s = \xi - {\omega'}^{-1} v(B_0), \quad v_s(P_1, \ldots, P_k) = v(P_1, \ldots, P_k) + v(B_0)$$

と定義すると，

$$2\omega' \xi_s \in \Gamma, \quad \Theta = {\omega'}^{-1} v_s(S^{g-1}X) + \xi_s$$

ここで，Θ は θ 因子である．つまり，$\theta({\omega'}^{-1} v_s(P_1, \ldots, P_{g-1}) + \xi_s) = 0$ となる．

(K-M-P, 2016)

ご静聴ありがとうございました