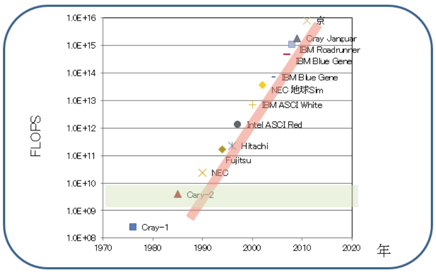
数学特論／数理科学 I　松谷茂樹

0　講義を始めるまえに



2010 年代に入って、コンピュータ技術（ハードウエア、ソフトウエア）が急速に発展した。1990 年代初頭のスーパーコンピュータは 2010 年代の PC と同等である。

1990 年代の計算機を利用して計算された学術論文の内容は高校生、高専生、大学生でも再現しようと思えば再現できる時代になっている。

企業のものづくりの現場でも、これらの発展を利用し、製品開発を行っている。計測器も計算機を利用しているし、製造装置も計算機を利用している。今後、10 年後、20 年後は更に発展を行うことを考えれば、計算機なしに、様々な研究や製品開発というものは存在し得ない。（逃れられない。）

その際、現象（社会現象、自然現象）をモデル化し、計算機を有効に利用することで世界を変えてゆく事が鍵となる。「**数学を言葉として世界を記述すること**」の面白さの一端を知ることが本講義の目標である。

1　復習：空間ベクトル、平面ベクトル

平面上のベクトル

平面上のベクトルとは、ある平面上の 2 点 P と Q とに対して，

$$\vec{u} = \overrightarrow{QP} = Q \text{ から } P \text{ への矢印}$$

のことである。

1. 平面上のベクトルは平面上を平行移動できるとする。(平行移動して完全に一致するものは同じベクトルと考える)
2. $\overrightarrow{QP}$ と $\overrightarrow{PS}$ に対して、加法を
$$\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QS}$$
と約束する。
3. 平面上のベクトルとは、**長さと方向（矢印）**を持ったもの
4. 平面上のベクトルを**マイナス** $-$ とすると、矢印を逆にする。$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$
5. $\overrightarrow{PP}$ を**零ベクトル** $\vec{0}$ とする。

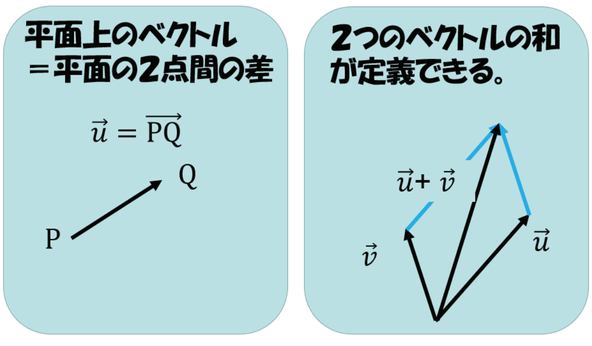


図 1-1

これらはベクトル表記（成分表示）で書くとより判りやすくなる。

但し、平面上のベクトルの表記の仕方としては**横ベクトル** (u_x, u_y) とするものと $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ とする**縦ベクトル**とする表記方法がある。後々のために縦ベクトルのものを採用する。

位置ベクトルに縦ベクトルや横ベクトルという区別はないので、**位置ベクトルに関しては**

$$(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は同じものと約束する。

平面上のベクトルに関しては次のような性質を持つ：

平面上のベクトルの座標

平面上のベクトルの座標表示とは、ある平面上の 2 点 P と Q が $P = (x_1, y_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $Q = (x_2, y_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ と xy 座標で表示できたとすると

$$\vec{u} = \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

と書くものである。

1. 平面上のベクトルは平面上を平行移動できるとする。(平行移動して完全に一致するものは同じベクトルと考える) i.e.,
平面上の 2 点 $S = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$ に対して $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ y_3 - y_4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{TS}$ と $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{QP}$ とが、
$$x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = a, \quad \text{かつ} \quad y_1 - y_2 = y_3 - y_4 = b$$
のとき（各成分が、それぞれ一致しているとき（一つでも異なる場合はＮＧ））
$$\vec{u} = \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
と書く
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ に対して、加法は
$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$
となる。($\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QS}$ に対応する)
3. 平面上のベクトルとは、**長さと方向（矢印）**を持ったもの、i.e., $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に対して
$$\text{長さ}|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$\text{方向}\vec{e} = (a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2})$$
$$\vec{u} = |\vec{u}|\vec{e}$$
長さを α 倍したベクトルを $\alpha\vec{u}$ とすると、$\alpha\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$ となる。
4. 平面上のベクトルを**マイナス** $-$ とすると、矢印を逆にする。
$$\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
5. **零ベクトル** $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

上記 1 の条件 ($\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{QP}$) の下で、点 $R = \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix}$ に対して，$\overrightarrow{PR} =$

$\begin{pmatrix} x_5 - x_1 \\ y_5 - y_1 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{TS}$ との足し算は

$$\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} x_5 - x_2 \\ y_5 - y_2 \end{pmatrix}$$

となる。

このとき、次の性質を持つ

平面上のベクトル

平面上のベクトルは次を満たす：

1. 加法性が成り立つ：$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ に対して、次が成り立つ：
   (a) 交換法則　$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
   (b) 結合法則　$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
   (c) 零ベクトルの性質　$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
   (d) 逆ベクトルの性質　$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
2. 実数とベクトルとの積
   実数 a と平面上のベクトル $\vec{u}$ に対して、$a\vec{u}$ も平面上のベクトルとなり、$\vec{u}$, $\vec{v}$ と実数 a, b に対して、
   以下を満たす：
   (a) 結合法則　$(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$, $1\vec{u} = \vec{u}$
   (b) 分配法則　$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
   (c) 分配法則　$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
   (d) 零ベクトルの性質 $0\vec{u} = \vec{0}$,
   (e) $(-a)\vec{u} = -(a\vec{u})$
3. ベクトル間の内積が定義できる：$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ と実数 a, b に対して、
   (a) 交換法則 $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$
   (b) 分配法則 $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w})$
   (c) 分配法則 $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{w})$
   (d) $a(\vec{u}, \vec{v}) = (a\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, a\vec{v})$
   (e) $(\vec{u}, \vec{u})$ は $\vec{u}$ の長さ $|\vec{u}|$ の二乗に一致し、$|\vec{u}| = 0$ のとき、$\vec{u}$ は $\vec{0}$ に一致する。

平面上のベクトルとは

平面ベクトルは方向と長さを持つものである。

空間のベクトル

３次元空間内のベクトルも平面を空間と置き換えることで全く同様に記述される。**2** つの成分を **3** つの変更すると空間上のベクトルに一致する例えば $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

2　一般のベクトル空間

我々の時空間を表現するために定義されたベクトル空間をより一般化することで関数や、行列、更には微分作用素なども含めたものを記述するように抽象化し、昇華させることを考える。

（関数空間や諸々のものを幾何学的に理解するため）

ベクトルの一般化

平面ベクトル、空間上のベクトルを一般化する際に、長さは諦める！

一般　実ベクトル空間の定義

集合 V が実ベクトル空間とは以下を満たすものである：

1. 加法性が成り立つ：任意の $u, v, w \in V$ に対して、次が成り立つ：
   (a) 交換法則 $u + v = v + u \in V$
   (b) 結合法則　$(u + v) + w = u + (v + w)$
   (c) 零ベクトル $0 \in V$ の存在 $u + 0 = 0 + u = u$ と
   (d) 逆ベクトル $-u \in V$ の存在 $(-u) + u = u + (-u) = 0$
2. 実数とベクトルとの積（実数倍）
   実数全体を $\mathbb{R}$ と記すとき、任意の $a \in \mathbb{R}$ と任意の $v \in V$ に積 (定数倍）au が V の元となり、以下を満たす：
   (a) 規格化と零ベクトルとの整合性　$1u = u \in V$, $0u = 0 \in V$
   (b) 結合法則　$(ab)u = a(bu)$
3. 実数倍とベクトルの和とが整合が取れている
   実数 $a \in \mathbb{R}$ と $u, v, w \in V$ と実数 a, b に対して、
   (a) 分配法則　$(a + b)u = au + bu$
   (b) 分配法則 $a(u + v) = au + av$
   (c) $(-a)u = -(au)$

$0 \in V$ を原点と呼ぶ。

標語として「必要条件として：ベクトル空間はゼロ倍して原点が定まる空間」である

位置ベクトルにはゼロ倍という概念は存在しない。基準点は原点ではない。（東京駅でも佐世保駅でも、どちらを基準点としてもよい）

ベクトル空間の例１．関数空間

２つの実数値の関数は１）足し算が定義でき、２）実数値倍が定義でき、３）足し算と実数倍が整合している
以下のように、実数値関数の集合はベクトル空間の定義を満たしている⇒　これより **関数空間**と呼び、関数の集合を幾何学的に理解したりする（直交性や関数間の写像を考えたりする）:

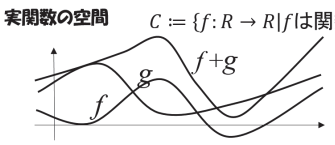


図 2

このとき「関数の長さ」は、色々な長さ（正確にはノルム）が定義され必ずしも一意的に定まらない。

ベクトル空間の例２．行列達のなす集合

$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ が作る空間は以下を満たす：

1. 加法：$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
   $$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} \end{pmatrix}$$
2. 乗法：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
   $$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

２つめの性質 (b) を忘れると実ベクトル空間の定義を満たす。行列に自然な長さというものは想像がつかない。（実は幾つかの長さ（ノルム）が導入できるが、色々な長さが存在してしまう。）

線型代数に表現する対象

線型代数による主な研究対象は以下の３つ

1. 実空間（２次元ユークリッド空間、２次元射影空間（２次元ユークリッド空間に無限遠点を加えたもの)、３次元ユークリッド空間、３次元射影空間、４次元時空空間、……）
2. 関数空間
3. 線型空間の間の線形写像（行列、微分作用素、積分作用素……）

3　離散空間上の関数

ここではまず関数について、より判りやすい、離散空間上ので関数について考える。

離散空間とは図 1-3 のようなもの：簡単のために

$$D := \{x_i \mid x_i = a \times i, i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$

に対して

$$\mathcal{C} := \{f : D \to \mathbb{R} \mid f(i) \in \mathbb{R}, \quad i = 1.2.\ldots, n\}$$

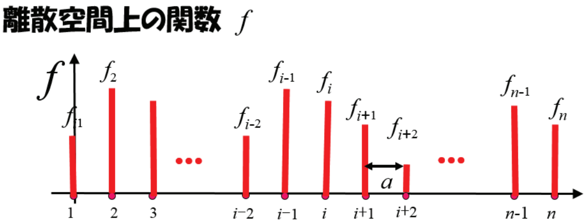


図 3

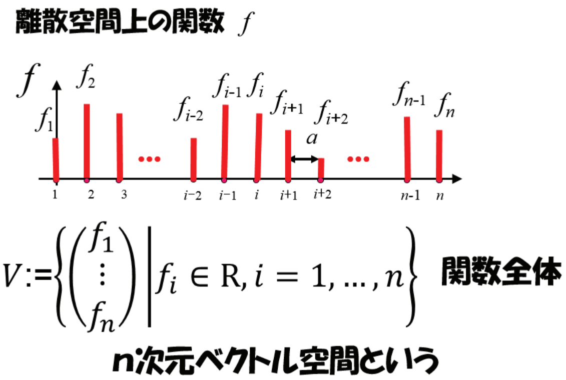


図 4

このとき、関数の和と定数倍は

$$af + bg = a \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af_1 + bg_1 \\ af_2 + bg_2 \\ \vdots \\ af_n + bg_n \end{pmatrix}$$

となる。

$n = 3$ の場合、以下のようになる。

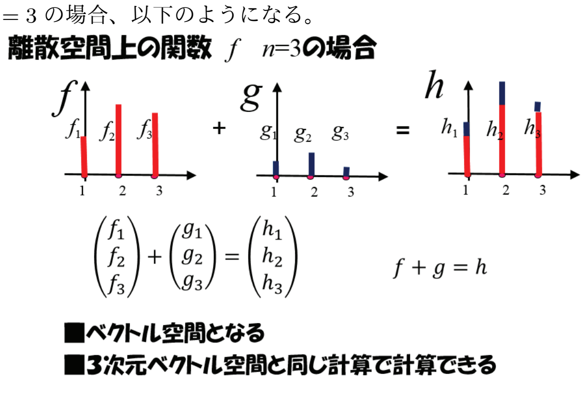


図 5

このとき以下のように考えることもできる。

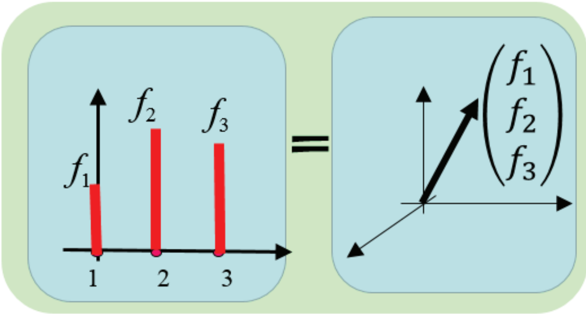


図 6

内積を定義するという事は、内角という概念や角度という概念が得られることと同値となる。

n 次元ベクトル空間の場合

高次元のベクトル空間を想像するのに、直交というイメージを持つ必要はない

4 次元空間も、5 次元空間も、更には十分大きい n 次元空間も、離散関数空間と考えれば計算できる

関数空間の応用

離散空間上の関数と思えるもの：

1. 電気信号
2. 構造物（プリンター、船、飛行機、……）の安定位置からのズレ　（十分多数の構造物の点）
3. デジタル信号、デジタル画像
4. 化学反応の反応過程でのある化合物の時間変化
5. 物質内にコンタミネーションの量

4　一次独立と次元

4.1　一次独立とは

一次独立という概念も，とても抽象的なものである．3 次元ベクトル空間のイメージが先行してしまうと，**「一次独立とは，直交した基底のことね」と思い勝ちであるが，これは厳密には誤りである．**一次独立という概念をものにするにはまずは**直感的な理解を一旦諦める事**が肝要である [1]．

定義 4.1　K ベクトル空間 V の元 $v_1, \ldots, v_n$ が（互いに）**一次独立，あるいは線型独立**とは

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \tag{1}$$

を満たす $a_i \in K \ (i = 1, \ldots, n)$ が

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \tag{2}$$

以外ないというときである．

[1] 数学用語の「独立」には「代数的独立」等もあったりするが，その中でも一次独立は最も重要なものの一つである．特に広い意味の物理現象の解析において独立性を感じる場合には，一次独立の概念で記述できるかどうかを考えてみることは肝要である．例えば,『力学的自由度』などがそうである．

4.1.1　関数空間の場合

関数空間として $\mathbb{R}$ のある領域 U 上の実数値連続関数全体を $\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ と記すと，2 つの連続関数 f と g, i.e., $f,g\in\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ に対して $f+g\in\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ ですし，適当な定数 $a\in\mathbb{R}$ に対して，$af\in\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ となるので，関数空間 $\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間である事が判る．

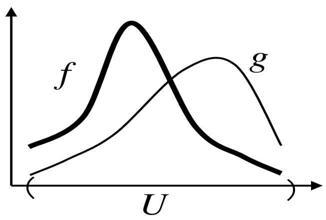


図 2-1

図 2-1 のような $\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ の元 f と g に対して，$af+bg=0$ となるものは $a=b=0$ 以外ありません．従って，f と g は一次独立という事となる．

4.2　次元と基底

次元と基底という概念について導入しておく．

ある K ベクトル空間 V の中の一次独立な元の集合 $B:=\{b_1,b_2,\ldots,b_\ell\}$ を考える．集合 B に新たな元を適当に加えて B を含む一次独立な元の集合 B' が存在したとする．更に同様の操作により B' を含む一次独立な元の集合 B'' を考える．このような操作で**極大**となる集合を B_m とする．

$$B\subset B'\subset B''\subset\cdots\subset B_m$$

ここで極大とは，B_m が V の一次独立な元の集合で，V のどんな元 u に対しても $\{u\}\cup B_m$ は 1 次独立な元の集合と成り得ないことである．式 (**??**) の状況である．このとき B_m の事を V の**線型基底**あるいは V の**基底**と呼ぶ．また，B_m の元の数を n とすると n を V の**次元**と呼び，

$$\dim_K V=n$$

と記す．

4.3　離散空間上の関数の場合

$f\in\mathcal{C}_n$ に対して、$f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)=(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ と書くと $\mathcal{C}_n$ は n 次元実ベクトル空間となる．

5　差分作用素

$f\in\mathcal{C}_n$ に対して、$f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)=(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ と記す。

一階の差分作用素

このとき、差分作用素を定義する

$$(\delta_{\mathrm{a},a}f)_i=\begin{cases}\frac{f_{i+1}-f_i}{a} & i=1,\ldots,n-1\\ -\frac{f_n}{a} & i=n\end{cases}$$

$$(\delta_{\mathrm{l},a}f)_i=\begin{cases}\frac{f_0}{a} & i=0\\ \frac{f_i-f_{i-1}}{a} & i=1,\ldots,n-1\end{cases}$$

$$(\delta_{\mathrm{c},a}f)_i=\begin{cases}\frac{f_1}{a} & i=0\\ \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{a} & i=1,\ldots,n-1\\ -\frac{f_{n-1}}{a} & i=n\end{cases}$$

演習 1.1

$\delta_{\mathrm{a},a}$、$\delta_{\mathrm{l},a}$、$\delta_{\mathrm{c},a}$ を行列で表現せよ。

差分ラプラス作用素

$$\Delta_a f=\delta_{\mathrm{a},a}\delta_{\mathrm{l},a}f$$

を定義する

演習 1.2

Δ_a を行列で表現せよ。

(a,b) 上で定義されるどこでもテイラー展開できる関数を (a,b) 上の**解析関数**と呼び、その全体 $\mathcal{C}^\omega((a,b),\mathbb{R})$ と記す。

正の実数 $0<\varepsilon\ll 1$ に対して $\Omega_\epsilon:=(0-\varepsilon,1+\varepsilon))$ 上で定義される解析関数全体 $\mathcal{C}^\omega(\Omega_\epsilon,\mathbb{R})$ に対して離散ベクトル空間 $\mathcal{C}_n^\omega(\Omega_\epsilon,\mathbb{R})$

$$\mathcal{C}_n^\omega(\Omega_\epsilon,\mathbb{R}):=\{f(x_k)\mid f\in\mathcal{C}_n^\omega(\Omega_\epsilon,\mathbb{R}),x_k=k/(n-1),k=0,1,\ldots n-1\}$$

例題

$\delta_{\mathrm{a},1/(n-1)}$、$\delta_{\mathrm{l},1/(n-1)}$、$\delta_{\mathrm{c},1/(n-1)}$ は $n\to\infty$ において、微分に一致することを示せ。

6　フーリエの法則

物理では

示強変数と示量変数

1. 示強変数：定義する単位を変えても変わらない量
   例）温度、濃度
2. 示量変数：定義する単位を変えるとそれに応じて値が変わる量
   例）エネルギー密度、熱量密度、

これを数学ではどのように表現するのか？

関数と分布関数

1. 関数
   各点で値が定まるもの
2. 分布関数：　fdx, $fdxdy$, $fdxdydz$ など積分の被積分関数のこと、座標を変えると値が変わるもの
   $x\to\xi(x)$
   $$fd\xi=f\frac{d\xi}{dx}dx=\left(f\frac{d\xi}{dx}\right)dx$$

フーリエの法則、フィックの法則

1. 温度（示強変数）との差に比例して、熱流量が定まる
2. 熱流量の流入量の差し引きで、変化する熱量が定まる
3. 熱量の変化により温度が変化する。

6.1　差分作用素の変形（有限差分法）

フーリエの法則を巧く表現するために、先に挙げた差分作用素を定義し直すことを考えましょう [2]。

まずは図 7 に示すように胞と節点を提示する。i 番めの胞 (cell)C_i $(i=1,2,\ldots,n)$ は間隔 a を置いた始点 (0) として $((i-1)a,ia)$ によっ

[2] 数学は言葉である。対象を表現するために、言葉の限界、利用可能性（無矛盾性）を熟知した後には、どんどん使い易いように言葉を変えてゆく事は実用上はとても重要である。言葉は固定したものではも、黴の生えた辞書の中にあるものを信仰するものではけっしてない。但し、無矛盾性や数学の厳密性をきっちり熟知できていない段階での変更の乱用は決して推奨されるものではないし、不幸な結果を産むことになる。

て指定される区間のことである。節点 (node) はその境界である。つまり i 番目の節点 N_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ は $N_i = ia$ と書かれる。

$$N_i = C_{i-1} \cap C_i, \quad (i = 2, \cdots, n-1).$$

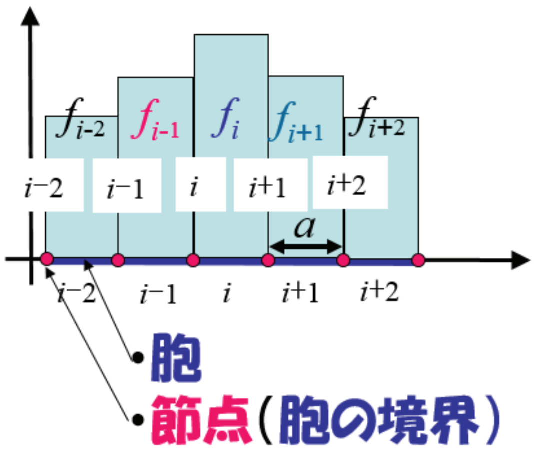


図 7

ここで、胞上の実数値関数 f を考えよう。

$$f = {}^t(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

但し　^{t} は転置という記号で、横ベクトルを縦ベクトルに (自然な対応で）書き換えるものである。図 7 に示す通りである。この関数の全体を $\mathcal{C}_{C,n}$ と記す。

他方、節点上の関数も考えよう。

$$j = (j_0, j_1, \ldots, j_n)$$

j の全体 $\{j\} =: \mathcal{C}_{N,n+1}$ は $(n+1)$ 次元の実ベクトル空間となる.

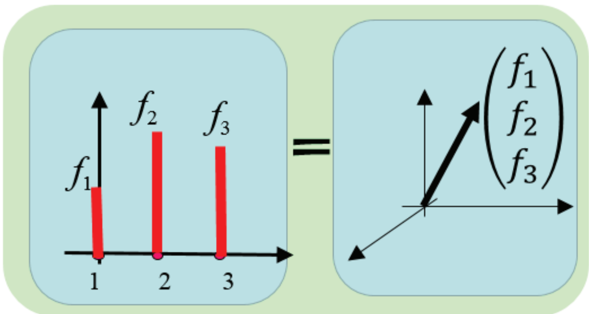


図 6

差分版の grad, div, Δ 作用素

ここで，線型写像 $\mathrm{grad} : \mathcal{C}_{C,n} \to \mathcal{C}_{N,n+1}$ を以下のように定義する。

$$(\mathrm{grad} f)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{a}, \quad (i = 1, \ldots, n-1),$$

$$(\mathrm{grad} f)_0 = (\mathrm{grad} f)_n = 0$$

同様に線型写像 $\mathrm{div} : \mathcal{C}_{N,n+1} \to \mathcal{C}_{C,n}$ を以下のように定義する。

$$(\mathrm{div} j)_i = \frac{j_i - j_{i-1}}{a}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

この合成により差分ラプラス作用素を定義する。

$$\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$$

演習 1.1

Δ を成分で表現せよ。

ここで線型写像とは、以下のようなものとなる。写像についてはきっちりと復習をしておく（別紙）。

線型写像

定義 6.1 *2 つの $\mathbb{R}$ ベクトル空間 V と W に対して，写像 $f : V \to W$ が線型写像又は $\mathbb{R}$-線型写像とは*
1. $v_1, v_2 \in V$ に対して $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$,
2. $a \in \mathbb{R}$ と $v \in V$ に対して $f(av) = af(v)$,
の 2 つが成り立つことである.

フーリエの法則と熱伝導方程式

1. 隣接する胞の温度 T（示強変数）との差 $\mathrm{grad}T$ に比例して、熱流量 j が定まる
2. 熱流量の流入量 j の差し引き $\mathrm{div}j$ で、変化する熱量が定まる
3. 熱量の変化により温度が変化 $(f' - f)/\delta t$ する。

差分熱伝導方程式

差分方程式で記述した際の熱伝導方程式はベクトルで

$$\frac{f^{(k+1)} - f^{(k)}}{\delta t} = \Delta f$$

と書かれる。$f^{(k)}$ は k ステップ後の離散空間上の関数（つまりベクトルの元）を表している。

k ステップ後の $f^{(k)}$ により、その未来である $(k+1)$ ステップ後の関数の形が定まる。このような方程式を**時間発展方程式**と呼ぶ。

熱伝導方程式、波動方程式などは**時間発展方程式**と呼び、初期値（ある時間での初期状態）が定まると後の運命が決定されてい行くことから**初期値問題**とも呼ぶ。

温度や物質の拡散等に関して差分法（正確には有限体積法）で解く最も基本となるものを提示した。

これにより具体的に例えば、エクセルにより計算が可能となる。

特殊な δt, a を取ると

$$f_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}(f_{i-1}^{(k)} + f_{i+1}^{(k)})$$

となる。つまり、$(k+1)$ ステップ後（未来）の状態は k ステップ時（現在）**隣接する胞の平均**によって定まる。これは**「シャープな形状はどんどん均されてゆく」**という熱や拡散（エントロピー）の本質を示していることに注意すべし。