非線形波動概論 A

松谷茂樹

0　この授業の目標

この授業の目標

非線形波動方程式を解く際に、線形性がどれくらい重要かを示すこと

1. 非線形とは　（線型代数の復習）
2. 常微分方程式の解法
3. 2 階の常微分方程式の解法
4. 単振り子
5. 単振り子の数理
6. 摂動法、多時間法
7. 単振り子と楕円関数

宿題は，以下の何れか

1. Euler 法による非線形な単振り子のプログラムを動かし，そのパラメータの振る舞いについて論じること
2. この授業のまとめ　A4 6 頁程度

を行うこと．

1　線形空間：再考

1.1　復習：空間ベクトル、平面ベクトル

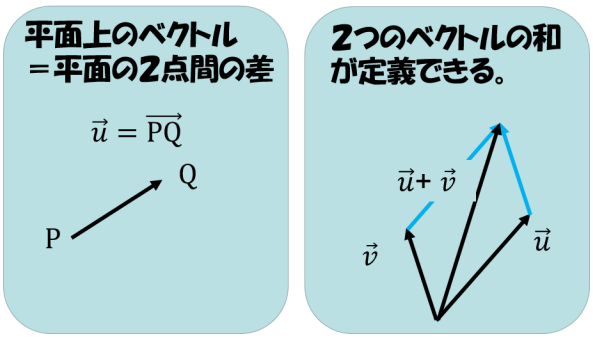


図 1-1

このとき、次の性質を持つ

平面上のベクトル

平面上のベクトルは次を満たす：

1. 加法性が成り立つ：
2. 実数倍
   実数倍が成り立つ：
3. 整合条件
   加法性と実数倍が整合している：(0 倍すると原点となる）
4. ベクトル間の内積が定義できる：

平面上のベクトルとは

平面ベクトルは方向と長さを持つものである。

空間のベクトル

３次元空間内のベクトルも平面を空間と置き換えることで全く同様に記述される。**2 つの成分を 3 つの変更すると空間上のベクトルに一致する**例えば $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

1.2　一般のベクトル空間

我々の時空間を表現するために定義されたベクトル空間をより一般化することで関数や、行列、更には微分作用素なども含めたものを記述するように抽象化し、昇華させることを考える。

（関数空間や諸々のものを幾何学的に理解するため）

ベクトルの一般化

平面ベクトル、空間上のベクトルを一般化する際に、長さは諦める！

一般　実ベクトル空間の定義

集合 V が実ベクトル空間とは以下を満たすものである：

1. 加法性が成り立つ：任意の $u, v, w \in V$ に対して、次が成り立つ：
   (a) 加法性 $u + v \in V$
   (b) 交換法則 $u + v = v + u \in V$
   (c) 結合法則　$(u + v) + w = u + (v + w)$
   (d) 零ベクトル $0 \in V$ の存在 $u + 0 = 0 + u = u$ と
   (e) 逆ベクトル $-u \in V$ の存在 $(-u) + u = u + (-u) = 0$
   $v + (-u)$ を $u - v$ と略記する。
2. 実数とベクトルとの積（実数倍）
   実数全体を $\mathbb{R}$ と記すとき、任意の $a, b \in \mathbb{R}$ と任意の $u \in V$ に対して、以下が成り立つ
   (a) 積 (定数倍）　$au \in V$
   (b) 結合法則　$(ab)u = a(bu)$
   (c) 規格化　$1u = u \in V$
3. 実数倍とベクトルの和とが整合が取れている
   実数 $a \in \mathbb{R}$ と $u, v, w \in V$ と実数 a, b に対して、
   (a) 分配法則　$(a + b)u = au + bu$
   (b) 分配法則 $a(u + v) = au + av$
   (c) 零ベクトルとの整合性　$0u = 0 \in V$
   (d) 逆ベクトルとの整合性　$(-a)u = -(au)$

$0 \in V$ を原点と呼ぶ。

標語として「必要条件として：ベクトル空間はゼロ倍すると原点が定まる空間」である

位置ベクトルにはゼロ倍という概念は存在しない。基準点は原点ではない。（東京駅でも金沢駅でも、どちらを基準点としてもよい）

ベクトル空間の例１．関数空間

２つの実数値の関数は１）足し算が定義でき、２）実数値倍が定義でき、３）足し算と実数倍が整合している
以下のように、実数値関数の集合はベクトル空間の定義を満たしている⇒　これより **関数空間**と呼び、関数の集合を幾何学的に理解したりする（直交性や関数間の写像を考えたりする）：

実関数の空間　$C := \{f : R \to R | f\text{は関数}\}$

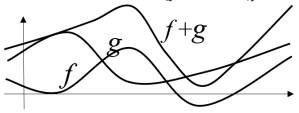


図 2

このとき「関数の長さ」は、色々な長さ（正確にはノルム）が定義され必ずしも一意的に定まらない。
関数空間の原点は零関数（至るところ零値の関数である）．

ベクトル空間の例２．行列達のなす集合

$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ が作る空間は以下を満たす：

1. 加法：$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} \end{pmatrix}$$
2. 乗法：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

２つめの性質 (b) を忘れると実ベクトル空間の定義を満たす。
行列に自然な長さというものは想像がつかない。（実は幾つかの長さ（ノルム）が導入できるが、色々な長さが存在してしまう。）

線型代数で表現する対象

線型代数による主な研究対象は以下の３つ

1. **実空間**（２次元ユークリッド空間、２次元射影空間（２次元ユークリッド空間に無限遠点を加えたもの）、３次元ユークリッド空間、３次元射影空間、４次元時空空間、……）
2. **関数空間**（信号波形，画像データ，データ空間，制御パラメータ空間）
3. **線型空間の間の線形写像**（行列、微分作用素、積分作用素……）（行列がベクトル空間となるように，線形写像全体はベクトル空間となる）

1.3　離散空間上の関数

ここではまず関数について、より判りやすい、離散空間上ので関数について考える。

離散空間とは図 1-3 のようなもの：簡単のために

$$D := \{x_i \mid x_i = a \times i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

に対して

$$\mathcal{C} := \{f : D \to \mathbb{R} \mid f(i) \in \mathbb{R}, \quad i = 1.2. \ldots, n\}$$

離散空間上の関数 f

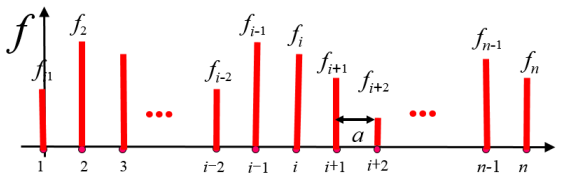
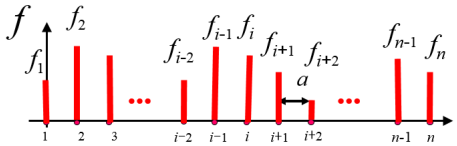


図 3

離散空間上の関数 f



$$V := \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \middle| f_i \in \mathrm{R}, i = 1, \ldots, n \right\}$$ **関数全体**

n次元ベクトル空間という

図 4

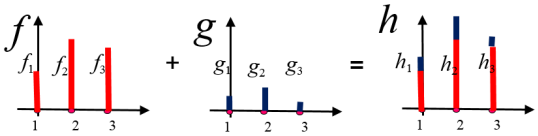
このとき、関数の和と定数倍は

$$af + bg = a \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af_1 + bg_1 \\ af_2 + bg_2 \\ \vdots \\ af_n + bg_n \end{pmatrix}$$

となる。

$n = 3$ の場合、以下のようになる。

離散空間上の関数 f　n=3**の場合**



$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \qquad f + g = h$$

■ベクトル空間となる
■3次元ベクトル空間と同じ計算で計算できる

図 5

このとき以下のように考えることもできる。

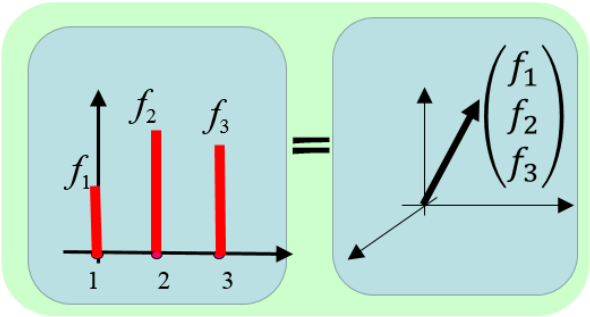


図 6

内積を定義するという事は、内角という概念や角度という概念が得られることと同値となる。

n 次元ベクトル空間の場合

高次元のベクトル空間を想像するのに、直交というイメージを持つ必要はない
4 次元空間も、5 次元空間も、更には十分大きい n 次元空間も、離散関数空間と考えれば計算できる

関数空間の応用

離散空間上の関数と思えるもの：

1. 電気信号
2. 構造物（プリンター、船、飛行機、……）の安定位置からのズレ　（十分多数の構造物の点）
3. デジタル信号、デジタル画像
4. 化学反応の反応過程でのある化合物の時間変化
5. 物質内にコンタミネーションの量

1.4　一次独立と次元

1.4.1　一次独立とは

一次独立という概念も，とても抽象的なものである．3 次元ベクトル空間のイメージが先行してしまうと，**「一次独立とは，直交した基底のことね」と思い勝ちであるが，これは厳密には誤りである．**一次独立という概念をものにするにはまずは**直感的**な理解を一旦諦める事が肝要である[1]．

定義 1.1 K ベクトル空間 V の元 $v_1, \ldots, v_n$ が (互いに) **一次独立**，あるいは**線型独立**とは $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$ を満たす $a_i \in K$ $(i = 1, \ldots, n)$ が $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ 以外ないというときである．

1.4.2　関数空間の場合

関数空間として $\mathbb{R}$ のある領域 U 上の実数値連続関数全体を $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ と記すと，2 つの連続関数 f と g, i.e., $f, g \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ に対して $f + g \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ ですし，適当な定数 $a \in \mathbb{R}$ に対して，$af \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ となるので，関数空間 $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間である事が判る．

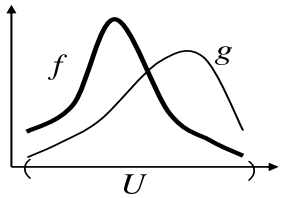


図 2-1

図 2-1 のような $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ の元 f と g に対して，$af + bg = 0$ となるものは $a = b = 0$ 以外ありません．従って，f と g は一次独立という事となる．

1.4.3　次元と基底

次元と基底という概念について導入しておく．

ある K ベクトル空間 V の中の一次独立な元の集合 $B := \{b_1, b_2, \ldots, b_\ell\}$ を考える．集合 B に新たな元を適当に加えて B を含む一次独立な元の集合 B' が存在したとする．更に同様の操作により B' を含む一次独立な元の集合 B'' を考える．このような操作で**極大**となる集合を B_m とする．

$$B \subset B' \subset B'' \subset \cdots \subset B_m$$

ここで極大とは，B_m が V の一次独立な元の集合で，V のどんな元 u に対しても $\{u\} \cup B_m$ は 1 次独立な元の集合と成り得ないことである．式 (**??**) の状況である．このとき B_m の事を V の**線型基底**あるいは V の**基底**と呼ぶ．また，B_m の元の数を n とすると n を V の**次元**と呼び，

$$\dim_K V = n$$

と記す．

[1]数学用語の「独立」には「代数的独立」等もあったりするが，その中でも一次独立は最も重要なものの一つである．特に広い意味の物理現象の解析において独立性を感じる場合には，一次独立の概念で記述できるかどうかを考えてみることは肝要である．例えば,『力学的自由度』などがそうである．

2　線形写像：再考

2.1　写像とは

ここで写像の復習をする．

写像

定義 2.1 集合 A から集合 B に**写像** f が与えられているとは，A の各要素 a に応じて B の元 $f(a)$ がひとつ対応づけられている事である．
このとき，写像は「$f : A \to B$」と表し，各元の対応は「$f : a \mapsto b$」と記す

記号についての注意：“$\to$” は集合からの集合の写像に “$\mapsto$” は元の対応を示すのに使う。
A を f の**定義域**と言う。

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$

を f の**像** (**値域**) と呼ぶ．

f に対して，f の像 $f(A)$ は一般に B に一致しない。
写像 $f : A \to B$ に対して，次を注意する。

(a) f は A の全ての元に対して，対応が与えられている．（与えられていない場合は写像とはいえない．）

(b) 対応先は B の中に納まっていることが必須である

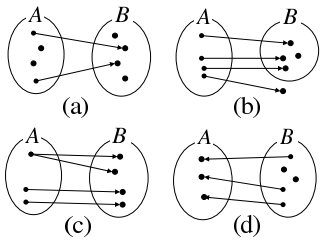


図 3-1

(c) A の元 a に対して，$f(a) \in B$ が一つ定まるのであって，B の元が 2 つ対応しているものは写像ではない。

関数は写像の一種であるが、時折、応用の現場で現れる「2 価関数」は現代数学的な用語では「関数ではない」。

(d) f に対して，対応を逆向きにした場合 ($B \to A$ は) 一般に写像とはならない。

写像は可逆ではない。（矢印の方向に異方性がある）

従って，それぞれの注意により，次の図 3-1 のいずれも写像とはならない。

写像の重要な概念である単射，全射，全単射についても定義する。

単射、全射、全単射

定義 2.2 写像 $f : A \to B$ が**単射** (**1 対 1**) とは $f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$ のときである．
写像 $f : A \to B$ が**全射** (**上への写像**) とは $f(A) = B$ となるときである．
写像 $f : A \to B$ が**全単射**とは，f が単射でかつ全射であるときである．

単射は injection、全射は surjection、全単射は bijection と英語ではいう。

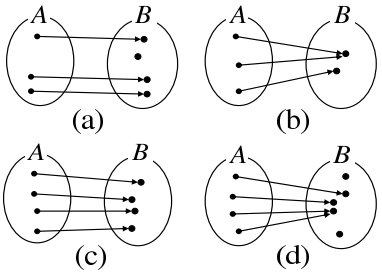


図 3-2

図 3-2 において (a) は単射，(b) は全射，(c) は全単射，(d) はその何れでもない写像です.

写像の例

以下は写像の例となる

1. 領域 U 上の関数 f ($x \in U$ に対して $f(x)$ が対応される)
2. 以下の線型写像の例
3. 整数 $a \in \mathbb{Z}$ に対して、$a \in \mathbb{R}$ とみなす写像 $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

2.2 線型写像

線型写像とはベクトル空間とベクトル空間の間に定義される特殊な写像のことである。

実ベクトル空間とは

1. 加法性が成り立つ
2. 実数倍が成り立つ
3. 加法性と実数倍が整合している

というものであった。**この性質を保つ写像のこと**を**線型写像**と呼ぶ。

線型写像

定義 2.3 *2* つの $\mathbb{R}$ ベクトル空間 V と W に対して，写像

$$f : V \to W$$

が**線型写像**又は **$\mathbb{R}$-線型写像**とは
1. $v_1, v_2 \in V$ に対して $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$,
2. $a \in \mathbb{R}$ と $v \in V$ に対して $f(av) = af(v)$,
の *2* つが成り立つことである.

線型写像の定義はこれだけであることに注意する
注意としては、
性質 1 はベクトル空間 V での加法性と、f によって写った後のベクトル空間 W での加法性が無矛盾であることを意味し
性質 2 は、V での実数倍が f によって写った後のベクトル空間 W での実数倍と無矛盾であることを意味している。

2.3 線型写像の例

1. 平面ベクトルに対する行列計算

   W を平面ベクトル全体とする. $u \in W$ は $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ と書けた。
   $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in W$ に対するある行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ による変換

   $$Au = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix}$$

   は上記の線型変換の例である。

   $$f_A : W \to W, \quad f_A(u) = Au \text{ と見ている}$$

   実際：

   (a) **(加法性)** $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in W$ に対して

   $$A(u + v) = Au + Av$$

   (b) **(実数倍)** $u \in W$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して

   $$A(au) = aAu$$

   となる。

2. 実数値の関数空間は制限がつかなければ、$\mathbb{R}$ 線型空間になる。それに従い、二つの関数空間に対して、線型写像が存在する。

   $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f$ は無限回微分可能 $\}$ を考えよう。

   微分作用素 $\dfrac{d}{dx}$ は $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ から $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ への線型写像となっている。

   $$\frac{d}{dx} : \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$$

   実際：

   (a) **(加法性)** $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ $(f + g) \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ （各点 $x \in U$ において $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$）

   $$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

   より詳しくは各点 $x \in U$ において $\dfrac{d(f + g)}{dx}(x) = \dfrac{df(x)}{dx} + \dfrac{dg(x)}{dx}$ となる。

   (b) **(実数倍)** $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ $a \in \mathbb{R}$ （各点 $x \in U$ において $(af)(x) = af(x)$）

   $$\frac{d}{dx}(af) = a\frac{d}{dx}f = a\frac{df}{dx}$$

   より詳しくは各点 $x \in U$ において $\dfrac{d(af)}{dx}(x) = a\dfrac{df(x)}{dx}$ となる。

線型写像でない（非線形な）例

1. **平行移動は線型写像（線型変換）ではない。** $w \in W$ を一つ固定する。$w \neq 0$ とする

   $$f_w : W \to W, \quad f_w(u) := u + w$$

   とすると

   $f_w(u+v) = u+v+w$ に対して $f_w(u)+f_w(v) = u+v+2w$ となり

   $$f_w(u + v) \neq f_w(u) + f_w(v)$$

   また $f_w(au) = au + w$ に対して $af_w(u) = au + aw$ となり $a \neq 1$ ならば

   $$f_w(au) \neq af_w(u)$$

   となる。

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ は上記を満たさない。
   （$f(x + y) = (x + y)^2 \neq x^2 + y^2 = f(x) + f(y)$ 及び $f(ax) = a^2x^2 \neq ax^2 = af(x)$）
   よって、このような写像を**非線型写像**と呼ぶ場合がある。

線型写像の特徴

1. 実-線型写像の合成は実-線型写像である
2. 実-線型写像全体は実ベクトル空間となる

行列の計算方法

行列 B に関わる線形写像 f_B や行列 A に関わる線形写像 f_A により

$$\mathbb{R}^K \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^M \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^N .$$

とするとその合成も $f_A \circ f_B$ も線形写像となる. $f_A \circ f_B$ も行列表現を持つため，その行列は A や B で書けるはず.
それが，行列の掛け算である：
$(N \times M)$ 行列 $A = (a_{ij})_{i=1,2,\ldots,N, j=1,2,\ldots,M}$ と $(M \times K)$ 行列 $B = (b_{ij})_{i=1,2,\ldots,M, j=1,2,\ldots,K}$ に対して、行列の掛け算は $AB = \left(\sum_{k=1}^{M} a_{ik}b_{kj}\right)_{i=1,2,\ldots,N, j=1,2,\ldots,K}$ と $(N \times K)$ 行列なる。

行列の積と線型変換の合成

K 次元ベクトル空間 U から M 次元ベクトル空間 V の変換を行列 B により行い、
K 次元ベクトル空間 V から M 次元ベクトル空間 W の変換を行列 A により行い際に

$$f_B : U \to V, \quad (f_A(u) = Au) \quad f_A : V \to W \quad (f_B(v) = Bv),$$

その合成は

$$f_A \circ f_B : U \to W$$

は、$u \in U$ に対して $(f_A \circ f_B)(u) := AB(u)$ となる。

行列全体はベクトル空間となる

$N \times M$ 行列は M 次元実ベクトル空間 V から N 次元実ベクトル空間 W へ $N \times M$ 行列全体

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}(N, M) &:= \{N \times M \text{ 行列 }\} \\ &= \{(a_{ij})_{i=1,2,\ldots,N, j=1,2,\ldots,M} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

は、$N \times M$ 次元ベクトル空間になる。

線形写像全体はベクトル空間となる

実ベクトル空間 V から実ベクトル空間 W への線型写像

$$\Omega := \{f : V \to W \mid \text{線形写像 }\}$$

は実ベクトル空間となる．

1. $f, g \in \Omega$ に対して，任意の $x \in V$ に対して，$(f+g)(x)$ を $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ とすると $(f+g)$ は線形写像となる．$f + g \in \Omega$:

   i.e., $(f+g)(ax+by) = f(ax+by) + g(ax+by) = af(x) + bf(y) + ag(x) + bg(y) = a(f+g)(x) + b(f+g)(y)$

2. $f \in \Omega$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して，任意の $x \in V$ に対して，$(cf)(x)$ を $cf(x)$ とすると cf は線形写像となる：$cf \in \Omega$:

   i,e,, $(cf)(ax+by) = cf(ax+by) = caf(x) + cbf(y) = a(cf)(x) + b(cf)(y)$

微分作用素のベクトル空間

$\mathcal{D} := \left\{ a_2 \dfrac{d^2}{dx^2} + a_1 \dfrac{d}{dx} + a_0 \;\middle|\; a_i \in \mathbb{C} \right\}$ （$\mathbb{C}$ は複素数全体）とすると，$\mathcal{D}$ は複素ベクトル空間となる
線型制御理論（PID 制御）は，この数学的事実に基づいて理論構築されている．

微分方程式

$D := \dfrac{d^2}{dx^2} + a(x)\dfrac{d}{dx} + b(x)$ とすると，
$D : \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ は線形写像である．
この核空間 K は
$K := \{f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \mid Df = 0\}$ は，微分方程式

$$Df = 0$$

の解空間と同じ．一般に基本解の空間は有限次元となる．

非線形微分方程式

$\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ の元 u に対して $\dfrac{d^2}{dx^2}u(x) + u(x)\dfrac{d}{dx}u(x) = 0$ は，線形写像ではない．

3 常微分方程式とオイラー法

常微分方程式

常微分方程式とは，$(n+2)$ 変数の関数

$$F(a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1})$$

（例えば，$n=2$ のとき $3a_3^3 + 2a_2 + \mathrm{e}^{\sin(a_1)} + \cos(\log a_0)$）が与えられた際に，実数の区間 $[0,1)$ 上の変数 t と，x を t について n 回微分可能関数として，

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, \frac{dx^n}{dt^n}) = 0$$

とするものである．
$t=0$ での値（初期値）を $x(0)$, $\frac{dx}{dt}(0)$, $\frac{d^2x}{dt^2}(0)$, $\cdots$, $\frac{dx^n}{dt^n}(0)$ として与えた際にこの方程式を満たす $x(t)$ を t の関数として決定することを，常微分方程式を解くという．

オイラー法

$n=1$ の

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$$

の場合を考える．$f(a_0, a_1)$ は与えられているとして，固定する．
微分は

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon}$$

と定義されるので，上記の式を

$$\frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} = f(t, x(t))$$

と近似する．これにより

$$x(t+\varepsilon) = x(t) + \varepsilon f(t, x(t))$$

とみなすことができる．
これにより $t_n := t_0 + n\varepsilon$, $x_n = x(t_0 + n\varepsilon)$, $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ とすると、

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \varepsilon f(t_0, x_0) \\ x_2 &= x_1 + \varepsilon f(t_1, x_1) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + \varepsilon f(t_{n-1}, x_{n-1}) \end{aligned}$$

として近似的に時間発展を決定できる．これをオイラー法と呼ぶ．

常微分方程式の解析解（例）

$f(x) = ax$ のとき（初期値 $x(t=0) = x_0$, $a \neq 0$），つまり，$\dfrac{dx(t)}{dt} = ax(t)$ のとき上の積分は

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{ax} = \frac{1}{a}\left[\log(x)\right]_{x_0}^{x} = \frac{1}{a}\log\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

となり，$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{at}$ となる．

オイラー法の例 $f(x) = ax$ のとき $\dot{x} = ax$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \varepsilon(ax_0) \\ x_2 &= x_1 + \varepsilon(ax_1) \\ &= x_0 + \varepsilon(ax_0) + \varepsilon(a(x_0 + \varepsilon(ax_0))) \\ &= x_0(1 + 2a\varepsilon + a^2\varepsilon^2) = x_0(1 + a\varepsilon)^2 \\ x_3 &= x_2 + \varepsilon(ax_2) \\ &= x_0(1 + a\varepsilon)^2 + \varepsilon a(x_0(1 + a\varepsilon)^2) \\ &= x_0(1 + a\varepsilon)^3 \\ &\vdots \\ x_n &= x_0(1 + a\varepsilon)^n \end{aligned}$$

$$\mathrm{e} = \lim_{m \to \infty}(1 + \frac{1}{m})^m$$

より，極限により解析解を復元していることが判る。
実際 $\varepsilon = t/n$ とすると以下のようになる。

$$x(t) := \lim_{n \to \infty} x_0 \left(1 + a\frac{t}{n}\right)^n = x_0 \lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + a\frac{t}{n}\right)^{n/at}\right)^{at} = x_0 \mathrm{e}^{at}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{n \to \infty} x_0 \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!r!}\left(\frac{at}{n}\right)^r \\ &= \lim_{n \to \infty} x_0 \sum_{r=0}^{n} \frac{n^r(n-r)!}{(n-r)!r!}\left(\frac{at}{n}\right)^r + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(at)^r \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad x(t) = x_0 \mathrm{e}^{at} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(at)^r$$

オイラー (Euler) (1827,28) 20-21 歳

ε が十分小さいとき $a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$ と書けることを発見し，これより

$$a^{n\varepsilon} = (1 + k\varepsilon)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!}(k\varepsilon)^r$$

を導出した．このとき $\varepsilon = 1/n$ として $n \to \infty$ の極限の式と $k = 1$ となるような特別な a を Euler の頭文字より e と名付け，展開

$$e = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}$$

から $2.71828\cdots$ を定めた．オイラー 20-21 歳の頃の話である．

4 単振動とオイラー法

ニュートン方程式の解法

$n=2$ の

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(x(t))$$

の場合を考える．$f(a)$ は与えられているとして，固定する．
これを

$$\begin{pmatrix} \frac{dv(t)}{dt} \\ \frac{dx(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

と考えれば、$n=1$ の場合に帰着できる．

オイラー法によるニュートン方程式の解

上記の見方に従って、微分

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon}$$

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{v(t+\varepsilon)-v(t)}{\varepsilon}$$

と定義されるので，上記の式を

$$\begin{pmatrix}\dfrac{v(t+\varepsilon)-v(t)}{\varepsilon}\\ \dfrac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x(t))\\ v(t)\end{pmatrix}$$

と近似する．これにより

$$\begin{aligned} v(t+\varepsilon) &= v(t)+\varepsilon f(x(t)),\\ x(t+\varepsilon) &= x(t)+\varepsilon v(t),\end{aligned}$$

とみなすことができる．よって，$x(t_0+n\varepsilon)=x_n$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$，$v(t_0+n\varepsilon)=v_n$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ とするとき，

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0+\varepsilon f(x_0), & x_1 &= x_0+\varepsilon v_0,\\ v_2 &= v_1+\varepsilon f(x_1), & x_2 &= x_1+\varepsilon v_1,\\ &\vdots\\ v_n &= v_{n-1}+\varepsilon f(x_{n-1}) & x_n &= x_{n-1}+\varepsilon v_{n-1}\end{aligned}$$

として時間発展を決定してゆくものである．これをニュートン方程式に対するオイラー法と呼ぶ.（ニュートン方程式は、ベルヌーイ，オイラーらが発見したもので，ニュートンはその原型を示しただけである．歴史学者マッハの誤謬である.）

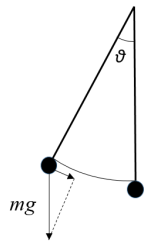
単振動の解法

$n=2$ の

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x(t)$$

の場合を考える．振り子の微小振動を表す運動方程式である．$x(t)$ は振り子の角度に相当する．
これを

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dv(t)}{dt}\\ \dfrac{dx(t)}{dt}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x(t)\\ v(t)\end{pmatrix}$$



とすると

単振動の解法

上記 $x(t), v(t)$ に対して，$z(t) := x(t)+\mathrm{i}v(t)$ とすると，$-\mathrm{i}z(t) = v(t)-\mathrm{i}x(t)$ となる事に注意すると，上記の式は

$$\frac{dz}{dt} = -\mathrm{i}z,\quad \frac{d(x+\mathrm{i}y)}{dt} = -\mathrm{i}x+v$$

となる．また，同様に，$w(t) := x(t)-\mathrm{i}v(t)$ とすると，$\mathrm{i}w(t) = v(t)+\mathrm{i}x(t)$ となる事に注意すると，上記の式は

$$\frac{dw}{dt} = \mathrm{i}w,\quad \frac{d(x-\mathrm{i}y)}{dt} = \mathrm{i}x+v$$

となる．よって，上記の答えは $z(t)=z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ または，$w(t)=w_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ となる．
これらより $x(t)=r_0\cos(t+t_0)$, $v(t)=v_0\sin(t+t_0)$ が解となる．

単振動の解法（オイラーの方法）

$x_0=x(0)=1$, $v_0=v(0)=0$ の場合は

$$\begin{pmatrix}\dfrac{v_{n+1}-v_n}{\varepsilon}\\ \dfrac{x_{n+1}-x_n}{\varepsilon}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_n\\ v_n\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}v_{n+1}\\ x_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_n-\varepsilon x_n\\ \varepsilon v_n+x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\varepsilon\\ \varepsilon & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_n\\ x_n\end{pmatrix}\text{ となる．}$$

したがって，$\begin{pmatrix}v_n\\ x_n\end{pmatrix} = (I+\varepsilon J)\begin{pmatrix}v_{n-1}\\ x_{n-1}\end{pmatrix} = (I+\varepsilon J)^2\begin{pmatrix}v_{n-2}\\ x_{n-2}\end{pmatrix} = \cdots$

$$= (I+\varepsilon J)^n\begin{pmatrix}v_0\\ x_0\end{pmatrix}$$

但し，$J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$．また $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とした．

行列の指数

$\varepsilon = t/n$ として，$n\to\infty$ とすると再び，方程式の解 $x(t)$ を再現する：

$$\begin{pmatrix}v(t)\\ x(t)\end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{t}{n}J\right)^n\begin{pmatrix}v_0\\ x_0\end{pmatrix}$$

より，上記と同じ考察により

$$\lim_{n\to\infty}\left(I+\alpha\frac{t}{n}J\right)^n = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}(tJ)^r$$

を得，それを e^{tJ} と書くことで形式的に

$$\begin{pmatrix}v(t)\\ x(t)\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{tJ}\begin{pmatrix}v_0\\ x_0\end{pmatrix}$$

と書ける．この展開は $J^2=-I$ から

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tJ} &= \left(\sum_{\ell=0}\frac{(-)^\ell}{(2\ell)!}t^{2\ell}I+\sum_{\ell=0}\frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}t^{2\ell+1}J\right)\\ &= \cos tI+\sin tJ\end{aligned}$$

となり，$\mathrm{e}^{tJ} = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$ と解を得る．$z_n = x_n+\sqrt{-1}v_n$ とし，J を $\sqrt{-1}$，I を 1 に置き換えれば，この公式はオイラーの公式

$$\mathrm{e}^{\sqrt{-1}t} = \cos t+\mathrm{i}\sin t$$

に対応する．オイラー法で厳密解が得られている．

ニュートン方程式の解法の例 I I

上記のオイラー法

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n-\varepsilon x_n\\ x_{n+1} &= \varepsilon v_n+x_n\end{aligned}$$

を

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n-\varepsilon x_n\\ x_{n+1} &= \varepsilon v_{n+1}+x_n\end{aligned}$$

とすると，数値誤差が格段に減少し，精度が向上することが知られている．後者を蛙飛び差分と呼んだり，２次のシンプレクティック法，またはこちらをオイラー法という場合もある．

課題 A1

非線形単振動についてまとめた後、以下の方程式を解く 1) プログラム（C 言語）を参考にして 2) excel による数式計算により，解を求め以下を報告せよ．
問題 1 は解析解との差を、問題 2 は問題 1 との差を報告せよ．
但し，初期値は適当に定めよ.（非線形の場合は初期値によって，解の振る舞いが異なることを示せ）

問題 1 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -x$　　問題 2 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\sin x$

また，最後に述べるシンプレクティック法を活用してもよい。（解が安定して、数値誤差を軽減して，議論が簡単になる）

5　オイラー法プログラム Euler1 の解説

以下のプログラムは Visual C++を前提にしたものであるため Linux 用などとは少し関数が異なることがある．(fopen_s などを fopen などに変更すればよい)

オイラー法の関数

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double euler_x(double x, double v, double dt) {
  return x + dt * v;
}

double euler_v(double v, double x, double dt,
  double(*func)(double x)) {
  return v + dt * func(x);
}
```

その他関数の例

```
double func1(double x) {
  return -x;
}

double Func1x(double t) {
  return cos(t);
}

double Func1v(double t) {
  return -sin(t);
}

double func2(double x) {
  return -sin(x);
}


double fabs(double x) {
  if (x < 0.0) return -x;
  return x;
}

double error(double x1, double x2) {
  return fabs(x1 - x2);
}
```

main 部

```
int main(void) {
  char name[32]; /* ファイル名を入れる箱 */
  FILE *outfp;   /* 外部出力用ファイルの札（タグ）*/

  double t0, t1, dt;
  double t, told;
  double x, xold;
  double v, vold;
  double xamp;
  double vamp;
  double period;
  int  it, n = 100;

  sprintf_s(name, "data%d.csv", 1);
  fopen_s(&outfp, name, "w");

  t0 = 0.0;
  t1 = 6.0;
  dt = (t1 - t0) / (double)(n);
  xold = 1.0;
  vold = 0.0;
  told = t0;
  fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f\n",
     t0, xold, vold, Func1x(told), Func1v(told),
     error(xold, Func1x(told)), error(vold, Func1v(told)));
  for (it = 0; it < n; it++) {
     x = euler_x(xold, vold, dt);
     v = euler_v(vold, xold, dt, func1);
     t = told + dt;
     fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f\n",
      t, x, v, Func1x(t), Func1v(t),
      error(x, Func1x(t)), error(v, Func1v(t)));
    xold = x;
    vold = v;
    told = t;
  }
  fclose(outfp); /* 終了のおまじない */

  sprintf_s(name, "data%d.csv", 2);
  fopen_s(&outfp, name, "w");
  n = 2000;
  t0 = 0.0;
  t1 = 15.0;
  dt = (t1 - t0) / (double)(n);
  xamp = 2.9;
  vamp = sqrt(2 * (1 - cos(xamp)));
  period = 8.0 / 3.1415;
  xold = xamp;
  vold = 0.0;
  told = t0;
  fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f\n", t0,
    xamp*Func1x(told/period), vamp*Func1v(told/period),
    error(xold, vamp*Func1x(told/period)),
    error(vold, vamp*Func1v(told/period)));
  for (it = 0; it < n; it++) {
    x = euler_x(xold, vold, dt);
    v = euler_v(vold, xold, dt, func2);
    t = told + dt;
    fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f\n", t,
      xamp*Func1x(t/period), vamp*Func1v(t/period),
      error(x, xamp*Func1x(t/period)),
      error(v, vamp*Func1v(t/period)));
    xold = x;
    vold = v;
    told = t;
  }
  fclose(outfp); /* 終了のおまじない */
  return 0;
}
```

6　単振動：相空間とエネルギー積分

しばらく，単振動（調和振動子）について考察する．

相空間の軌道と総エネルギー I

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x$$

の場合を考える．この時，一般解は

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0), \quad v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

となる．このとき，この解は

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

を満足することが判る．方程式の解（即ち、運動）は，相空間（位置 x と運動量（速度）v によりなる空間）では，楕円型形状を描く．振幅 A が大きい程、サイズの大きな楕円となる．
力学的には，これは総エネルギー（力学エネルギー）

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2$$

と関係する，上記軌道の場合は

$$E = \frac{\omega^2 A^2}{2}$$

となる．E は力学エネルギーである．

相空間の軌道と総エネルギー II

上記では発見的にエネルギーを導入したが，微分方程式からも得られる．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x$$

に対して，両辺に dx/dt を掛けると

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}\frac{dx(t)}{dt} = -\omega^2 x\frac{dx(t)}{dt}$$

とできる．これは

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2\right] = -\omega^2\frac{d}{dt}\left[x^2\right]$$

と書ける．右辺を移項することで

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2\right] = 0$$

となり，[] の中が時間変化しない（つまり，保存量である）ことが判る．それを E と置くと

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2$$

となり，上記のエネルギーが得られた．

滞在時間

ある領域 $[x, x+\delta x]$ の間にどれくらいの時間滞在しているかを計算するためにはどうすればよいだろうか？
を考える．

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2$$

より，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2E - \omega^2 x^2$$

とでき，

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2E - \omega^2 x^2}}$$

となる．上記の問題は

$$\int_x^{x+\delta x}\frac{dx}{\sqrt{2E - \omega^2 x^2}}$$

とすればよい．これをここでは滞在時間積分と呼ぶ．

滞在時間積分と解の関係

初期値 x_0 から時間 t の状態は

$$t = \int_0^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2E - \omega^2 x^2}}$$

で得られる．
E は解を持ちうる範囲であれば何でもよいので，$E = A^2\omega^2/2$ とパラメータ化すると右辺は

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}}$$

となる．この積分は $x_0 = A\sin(s_0)$ となるような s_0 により，$x = A\sin(s + s_0)$ とする変数変換を行うと，

$$dx = A\cos(s + s_0)ds, \quad A^2 - x^2 = A^2\cos^2(s + s_0)$$

より，

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\omega} = \frac{1}{\omega}s$$

となり，$\dfrac{x}{A} = \sin(s + s_0)$ より

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\sin^{-1}\frac{x}{A} - s_0\right)$$

となる．つまり，

$$x = A\sin(\omega t + s_0)$$

となり，通常の解を得る．これをエネルギー積分による方法と呼ぶ．
この方法は 1 次元の場合のみ有効であるが，非常に重要である．

7　非線形振り子とエネルギー積分

滞在時間積分と非線形解析

エネルギー積分の逆関数が，通常の解となる．後で出てくるが，

$$s = \int^x \frac{dx}{\sqrt{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}}$$

という積分は，$n = 2$ のとき，ほぼ上記のものの一般化であることが判る．$n = 2$ の場合は，三角関数，双曲関数などで書けることが知られており，ほぼ単振動の変形として捉えられる．他方，$n > 5$ 以上のとき超楕円積分，$n = 3, 4$ の時，楕円積分と呼ばれるものとなる．
本講義では，楕円積分を後で取り扱う．

非線形振り子でのエネルギー

上記では発見的にエネルギーを導入したが，微分方程式からも得られる．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 \sin(x)$$

に対しても両辺に dx/dt を掛けると

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}\frac{dx(t)}{dt} = -\omega^2 \sin x \frac{dx(t)}{dt}$$

とできる．これは

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 - \omega^2 \cos x\right] = 0$$

と書けので，[] の中が時間変化しない（つまり，保存量である）ことが判る．それを E と置くと

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \omega^2 \cos x$$

となる．E' は力学エネルギーである．$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots$ であるため，

$$E' + \omega^2 = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 \cdots\right)$$

より，$|x| << 1$ のとき，$E' + \omega^2 = E$ を新たなエネルギーとすれば，線形の場合に矛盾しない結果である．そこで，$1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$ を活用して，

$$E = \frac{1}{2}v^2 + 2\omega^2 \sin^2(x/2)$$

とする．$x = 0, v = 0$ のとき，$E = 0$ となって，E' より良いパラメータ化になっている．

非線形振り子でのエネルギーについて

$E = 2\omega^2 k^2$ でパラメータ化すると運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}v^2 = 2\omega^2(k^2 - \sin^2(x/2))$$

と記述される．左辺は運動エネルギーで非負の値を取る．
エネルギー保存より k は定数である．
これより，$k = \sin(x_0/2)$ となるところで，右辺はゼロとなる．
$\sin^2(x/2) \in [0, 1]$ より，右辺がゼロになる場合とならない場合に分けられる．
また、$|x| < \pi$ のとき，丁度 $v = 0$ となるような場合と，$x = \pi$ のとき，丁度 $v = 0$ となるような場合に分けられる．
よって，以下の 3 つの場合に分類される

1. $k < 1$: 振動する場合
2. $k = 1$: 最大点に到達して止まる場合
3. $k > 1$: 振り子が回転する場合

エネルギー的考察でこれらが右側の状態と対応することは、予想されるが，詳しくは解を調べなければならない．

非線形振り子でのエネルギー積分法 I: $k < 1$

初期値 x_0 から時間 t の状態は

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{2\omega\sqrt{k^2 - \sin^2(x/2)}}$$

となる．
更に，$kz = \sin(x/2)$ とすると，$(|\sin(x/2)| < 1)$ より $kdz = (\cos(x/2))/2dx = (\sqrt{1 - k^2z^2})/2dx$ より

$$dx = \frac{2kdz}{\cos(x/2)} = \frac{2kdz}{\sqrt{1 - k^2z^2}}$$

となる．よって，

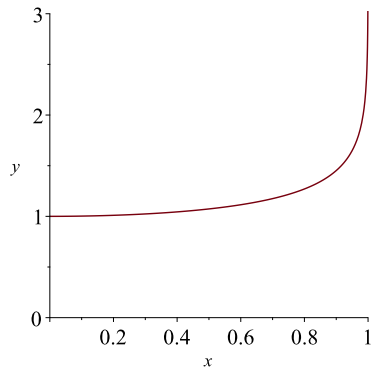
$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\omega\sqrt{(1 - k^2z^2)(1 - z^2)}}$$

となる．
$z = \pm 1$ のとき，$\sin(x/2) = k$ となり，上記，運動エネルギーが零となることより，

$$K := \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - k^2z^2)(1 - z^2)}}$$

とすると，$2K\omega$ がこの系の半周期に相当する．つまり，この周期 T は $4K\omega$ と一致する．

楕円関数と楕円積分



横軸 k に対する K の振る舞いの図

楕円関数と楕円積分

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-k^2z^2)(1-z^2)}}$$

とすると，この積分は（不完全）楕円積分と呼ばれるものとなる．この積分は $\mathrm{sn}^{-1}(z)$ として与えられ，$z = \mathrm{sn}u$ を楕円 sn 関数と呼ばれるものとなる．

$$z = \mathrm{sn}(u) = \mathrm{sn}(u,k)$$

と書かれることもある．
同様に，楕円 $\mathrm{cn}(u) = \mathrm{cn}(u,k)$ 関数, 楕円 $\mathrm{dn}(u) = \mathrm{dn}(u,k)$ 関数が定義される．この時，

$$\mathrm{cn}^2u + \mathrm{sn}^2u = 1, \quad k^2\mathrm{sn}^2u + \mathrm{dn}^2u = 1$$

を満たし，その微分は

$$(\mathrm{sn}u)' = \mathrm{cn}u\mathrm{dn}u, \quad (\mathrm{cn}u)' = -\mathrm{sn}u\mathrm{dn}u, \quad (\mathrm{dn}u)' = -k^2\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u$$

で与えられる．
また，am 関数として，$\mathrm{sn}u = \sin(\mathrm{am}(u))$ を導入すると，

$$\mathrm{cn}(u) = \cos(\mathrm{am}(u)),$$

と書けることが知られている．

$$\sin\frac{x}{2} = k\mathrm{sn}(\omega t)$$

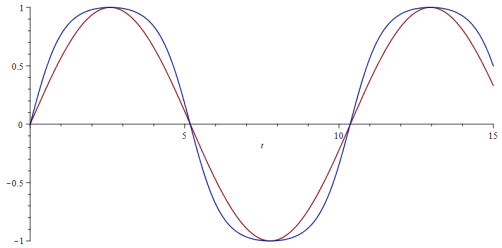
より，

$$x = 2\sin^{-1}(k\mathrm{sn}(\omega t))$$

により定まる．
$0 < k \ll 1$ のとき，$\mathrm{sn}(u,k) = \sin(u,k)$ と書かれることが知られている．また，$|Y| \ll 1$ のとき $\sin Y = Y$ に注意すると

$$x = 2k\sin(\omega t)$$

を再現する．$2k$ が振幅に相当する．



$\sin(t/1.65)$ と $\mathrm{sn}(t, k = 0.95)$ を表示
非線形性のため線形波から軌道がずれていることが見て取れる．

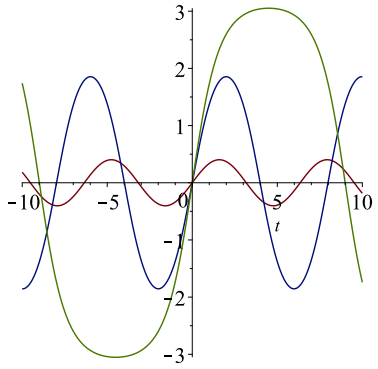
非線形振り子でのエネルギー積分法 II　周期: $k < 1$

楕円完全積分

$$K := \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-k^2z^2)(1-z^2)}}$$

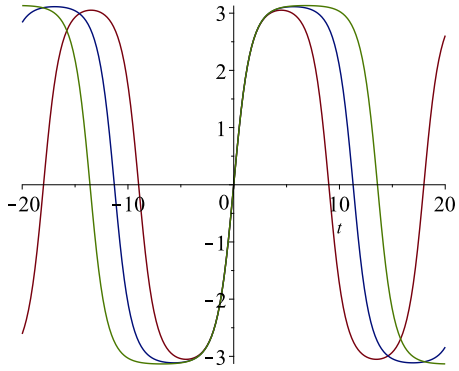
は，適当な数学ソフトウエア (Mathematica, Maple など）ではライブラリとして，用意されている．
その振る舞いを記述すると，次の図のようになる．眺める通り，周期は振幅 $2k$ に依存して，異なるのである．また，次で述べる $k = 1$ の場合は，無限の時間を要して，$x = -\pi$ から $x = \pi$ に向かい，各点で静止（$v = 0$）する

非線形振り子の解



$k = 0.2, 0.8, 0.999$ に対する解の振る舞いの図

非線形振り子の解



$k = 0.999, 0.9999, 0.99999$ に対する解の振る舞いの図

非線形振り子でのエネルギー積分法 IV　周期: $k = 1$

$k = 1$ のとき

$$t = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\omega\sqrt{(1-k^2z^2)(1-z^2)}}$$

は

$$t = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\omega(1-z^2)}$$

となる．$z = \tanh u$ とすると，$dz = du/\cosh^2 u$ と，$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$（$1 - \tanh^2 u = 1/\cosh^2 u$）より

$$t = \frac{u}{\omega}$$

となる．つまり，

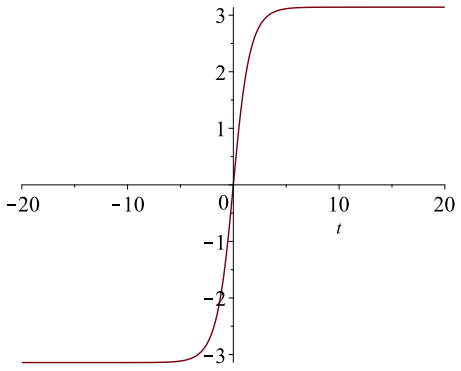
$$z = \tanh\omega t$$

となり，

$$x(t) = 2\sin^{-1}(\tanh(\omega t))$$

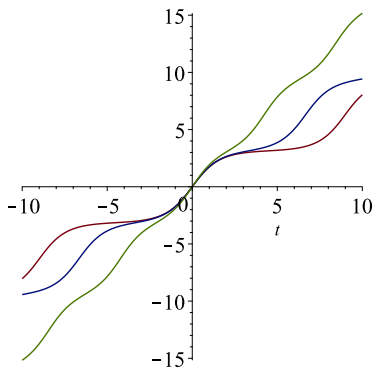
となる．$x \in [-2\pi, 2\pi]$ となっていることが判る．

非線形振り子の解



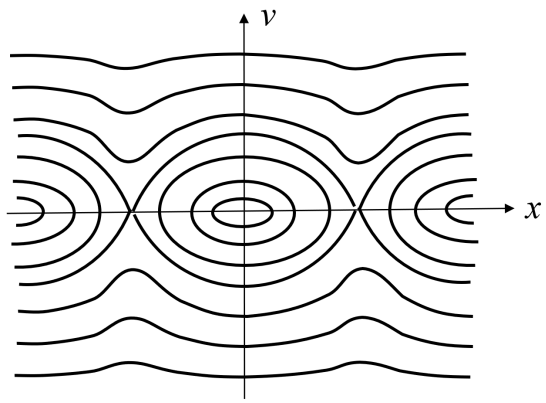
$k=1$ に対する解の振る舞いの図

非線形振り子の解



$k=1.001, 1.01, 1.1$ に対する解の振る舞いの図

非線形振り子の相空間の振る舞い



非線形振り子でのエネルギー積分法 **V:** $k>1$

運動エネルギー表示を

$$\frac{1}{2}v^2 = 2\omega^2(k^2-\sin^2(x/2)) = 2\omega^2k^2\left(1-\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

と書き換える．

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{2\omega k\sqrt{1-\sin^2(x/2)/k^2}}$$

となる．
更に，$z=\sin(x/2)$ とすると，$(|\sin(x/2)|\leq 1)$ より $kdz=(\cos(x/2))/2dx=(\sqrt{1-z^2})/2dx$ より

$$dx=\frac{2kdz}{\cos(x/2)}=\frac{2dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$t=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\omega k\sqrt{(1-z^2)(1-k^{-2}z^2)}}$$

となる．

$$x=2\sin^{-1}(\mathrm{sn}(\omega kt,1/k))=2\mathrm{am}(\omega kt,1/k)$$

となる．am 関数は単調増加関数となるので，回転を意味する．

8　単振動と強制振動

振り子と摩擦項

単振動 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t)$ を考察してきたが、ここで、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\rho\frac{dx(t)}{dt} = -\omega_0^2 x(t)$$

を考察しよう．但し，x は実値を取るものとし，初期値は

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

とする．ρ の項を摩擦項と呼ぶ．これは，

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} + 2\rho\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\right)x(t) = 0$$

とも書ける．
これは $x(t) = A\mathrm{e}^{\alpha t}$ を代入して見ると，

$$(\alpha^2 + 2\rho\alpha + \omega_0^2)x = 0$$

とする特性方程式を得，$\alpha^2 + \rho\alpha + 1 = 0$ より

$$\alpha = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$$

なる解を得る．

振り子と減衰項

ρ が正であれば，

$$Re(-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}) < 0$$

である．
ここでは議論を簡単にするために $2 > \rho$ とする．
$0 < \rho < \omega_0$ のとき，（このときに関心がある）$\omega_0^2 - \rho^2 > 0$ に注意して，$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$ とすると，２つの解 α_1, α_2 は

$$\alpha_1 = -\rho + \omega\mathrm{i}, \quad \alpha_1 = -\rho - \omega\mathrm{i}$$

となる．よって，一般解は

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\rho t}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$$

となる．初期値と $x(t)$ は実関数であるとすると

$$x(t) = x_0\mathrm{e}^{-\rho t}\cos(\mathrm{i}\omega t)$$

である事が判る．グラフで描くと次のグラフとなる．減衰してゆく様が見える．

振り子と減衰項と強制振動

$\left(\dfrac{d^2}{dt^2} + 2\rho\dfrac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x(t) = 0$ に対して，これに外部から外力を与えた場合を考える．外力を

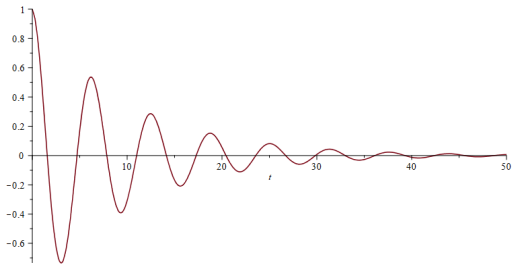
$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\rho\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x(t) = a\sin\mu t$$

とする．この時，次の解が得られる．(導出は次を見よ）

$$x(t) = c\mathrm{e}^{-\rho t}\cos(\omega t) + \frac{a\sin(\mu t + \varphi_0)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \mu^2)^2 + (2\rho\mu)^2}}$$

を得る．但し $\tan\varphi_0 = \dfrac{-2\rho\mu}{\omega_0^2 - \mu^2}$ である．
$\rho = 0$ かつ $\omega^2 = \mu^2$ のとき，発散する．
$\rho \neq 0$ の場合も $\omega^2 = \mu^2$ のとき第二項の振幅が最大となる．これを共鳴（レゾナンス）現象と呼ぶ．

振り子と減衰項



強制振動の解の導出

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\rho\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x(t)=0$$

に対して，これに外部から外力を与えた場合を考える．外力を

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\rho\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x(t)=a\sin\mu t$$

とする．そこで，そこで，

$$x_1(t):=\mathrm{e}^{-\rho t}\cos(\omega t),\quad x_2(t):=\mathrm{e}^{-\rho t}\sin(\omega t)$$

として，係数変数法を適用して

$$x(t)=A(t)x_1(t)+B(t)x_2(t)$$

として，見よう．

$$\dot{x}(t)=\dot{A}(t)x_1(t)+A(t)\dot{x}_1(t)+\dot{B}(t)x_2(t)+B(t)\dot{x}_2(t)$$

$A(t)$ と $B(t)$ とには，適当な条件を課すことができるので，

$$\dot{A}(t)x_1(t)+\dot{B}(t)x_2(t)=0$$

とすると

$$\dot{x}(t)=A(t)\dot{x}_1(t)+B(t)\dot{x}_2(t)$$

また，

$$\ddot{x}(t)=\dot{A}(t)\dot{x}_1(t)+A(t)\ddot{x}_1(t)+\dot{B}(t)\dot{x}_2(t)+B(t)\ddot{x}_2(t)$$

となる．これより，

$$\dot{A}(t)\dot{x}_1(t)+\dot{B}(t)\dot{x}_2(t)=A\sin\mu t$$

条件より

$$\dot{A}(t)\left(\dot{x}_1(t)-\frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)}x_1(t)\right)=a\sin\mu t$$

$\dot{x}_1=-\rho x_1-\omega x_2$ と $\dot{x}_2=-\rho x_2+\omega x_1$ と $x_1^2+x_2^2=\mathrm{e}^{-2\rho t}$ に気を付けると

$$\dot{A}(t)\left(-\rho x_1-\omega x_2-\left(-\rho x_1+\omega\frac{x_1^2}{x_2}\right)\right)=-\dot{A}(t)\omega\frac{\mathrm{e}^{-2\rho t}}{x_2}=a\sin\mu t$$

$$A=-\int^t\frac{a\sin(\mu t)\sin(\omega t)\mathrm{e}^{\rho t}}{\omega}dt$$

同様にして

$$B=\int^t\frac{a\sin(\mu t)\cos(\omega t)\mathrm{e}^{\rho t}}{\omega}dt$$

これらにより，詳細は次に示すが，

$$x(t)=c\mathrm{e}^{-\rho t}\cos(\omega t)+\frac{a\sin(\mu t+\varphi_0)}{\sqrt{(\omega_0^2-\mu^2)^2+(2\rho\mu)^2}}$$

を得る．但し

$$\tan\varphi_0=\frac{-2\rho\mu}{\omega_0^2-\mu^2}$$

である．ここで $\omega^2-\rho^2=\omega_0^2$ を使った．

強制振動の解の導出の積分について

$$A=\int^t\frac{a\sin(\mu t)\sin(\omega t)\mathrm{e}^{\rho t}}{\omega}dt$$

は

$$\sin(\omega t)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}),\quad \sin(\mu t)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t})$$

より

$$A=\int^t\frac{a}{4\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu+\omega)t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-\omega)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu-\omega)t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu+\omega)t})\mathrm{e}^{\rho t}dt$$

$$A=\frac{a}{4\omega}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu+\omega)t}}{\mathrm{i}(\mu+\omega)+\rho}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-\omega)t}}{\mathrm{i}(\mu-\omega)+\rho}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu-\omega)t}}{-\mathrm{i}(\mu-\omega)+\rho}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu+\omega)t}}{-\mathrm{i}(\mu+\omega)+\rho}\right)\mathrm{e}^{\rho t}$$

となる．同様に，

$$B=-\frac{a}{4\omega\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu+\omega)t}}{\mathrm{i}(\mu+\omega)+\rho}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-\omega)t}}{\mathrm{i}(\mu-\omega)+\rho}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu-\omega)t}}{-\mathrm{i}(\mu-\omega)+\rho}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu+\omega)t}}{-\mathrm{i}(\mu+\omega)+\rho}\right)\mathrm{e}^{\rho t}$$

となる．
これより，$A(t)x_1(t)+B(t)x_2(t)$ は

$$\frac{a((\mu^2-\omega^2-\rho^2)\sin(\mu t)+2\mu\rho\rho\cos(\mu t))}{((\mu^2-2\mu\omega+\omega^2+\rho^2)(\mu^2+2\mu\omega+\omega^2+\rho^2))}$$

となる．$\omega^2+\rho^2=\omega_0^2$ に気を付けると

$$=\frac{a((\mu^2-\omega_0^2)\sin(\mu t)+2\mu\rho\rho\cos(\mu t))}{(\mu^2+\omega_0^2)^2-4\mu^2(\omega_0^2-\rho^2)}$$

$$=\frac{a((\mu^2-\omega_0^2)\sin(\mu t)+2\mu\rho\rho\cos(\mu t))}{(\mu^2-\omega_0^2)^2+4\mu^2\rho^2}$$

となる．

松谷茂樹

9　近似法：摂動論＆多時間尺度法

非線形方程式と楕円関数

ここでは

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - \varepsilon x^3 = 0$$

を考察する。初期条件は $x(0) = 1$, $dx/dt(0) = 1$ とする．
この方程式は両辺に dx/dt をかけることで

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{\varepsilon}{4}x^4\right) = 0$$

とできるため，適当な積分定数（エネルギー E）により

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\varepsilon\frac{1}{2}x^4 - x^2 + E}$$

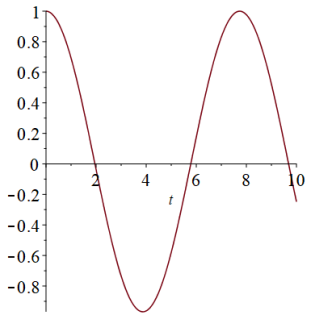
とでき，エネルギー積分法で

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon\frac{1}{2}x^4 - x^2 + E}}$$

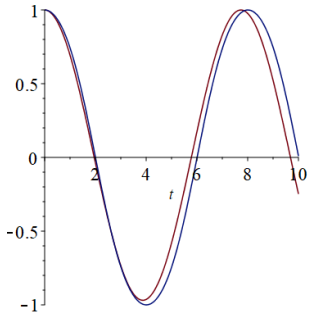
となり，この積分値（第一種非完全楕円積分）の逆関数（楕円関数）により $x = x(t)$ が陽に表すことができる．
しかし，ここでは $|\varepsilon| \ll 1$ として近似解を考える．

非線形方程式と摂動法

近似解はよい数値解とよく一致している．(ただし，違いを見るため $\varepsilon = 0.5$ としている)



摂動法の近似解



数値解析解

非線形方程式と摂動論

非線形現象とは言え，ある解の微小変化は常に線形近似ができる．
各解の周りの振る舞いは、各解毎に異なるため，対象とするベクトル空間の次元は有限とは限らない．
非線形現象の幾つかは,（無限次元の）線形空間の積み重ねとして解釈、理解できる．
摂動法はその典型的な方法の一つである．

非線形方程式と摂動論

$|\varepsilon| \ll 1$ とする．
$\varepsilon = 0$ の時，

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0 x = 0$$

より，$x = a\cos(\omega_0 t)$ となる．そこで，

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots$$

とする．また，振動数を（$\omega_0 = 1$）

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2$$

として，

$$t = \omega\tau$$

と時間をスケーリングする．

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau} = \omega\frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2}{d\tau^2}$$

ここで

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon(2\omega_0\omega_1) + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1) + \cdots$$

となる．

$$\frac{d^2}{dt^2} = (\omega_0^2 + \varepsilon(2\omega_0\omega_1) + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1) + \cdots)\frac{d^2}{d\tau^2}$$

また，εx^3 は

$$\varepsilon x^3 = \varepsilon x_0^3 + 3\varepsilon^2 x_1 x_0^2 + \cdots$$

ε^0次数 0 : $\ddot{x}_0 + x_0 = 0$

ε^1次数 1 : $\ddot{x}_1 + x_1 = -\dfrac{2\omega_1}{\omega_0}\ddot{x}_0 + \dfrac{1}{\omega_0^2}x_0^3$

$$\left(\omega_0^2\ddot{x}_1 + (2\omega_0\omega_1)\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_1 = x_0^3\right)$$

ε^2次数 2 : $\ddot{x}_2 + x_2 = -\dfrac{2\omega_1}{\omega_0}\ddot{x}_1 - \left(\dfrac{2\omega_1}{\omega_0} + \dfrac{2\omega_1}{\omega_0}\right)\ddot{x}_0 + \dfrac{3}{\omega_0^2}x_0^2 x_1$

$(2\omega_0\omega_1)\ddot{x}_1 + (\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1)\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_2 = 3x_0^2 x_1$

これらを順次解けばよい．

非線形方程式と摂動論

ε について 1 次まで計算をしよう．

$$x_0 = a\cos\tau$$

ここで $(\cos\tau)^3 = \frac{3}{4}\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau$ を利用して

$$\ddot{x}_1 + x_1 = a\left(\frac{2\omega_1}{\omega_0} + \frac{3}{4}a^2\right)\cos\tau + \frac{1}{4}\frac{a^3}{\omega_0^2}\cos 3\tau$$

となる．これが有限の安定な解を持つためには，

$$\left(\frac{2\omega_1}{\omega_0} + \frac{3}{4}a^2\right) = 0, \quad \omega_1 = -\frac{3}{8}a^2\omega_0$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{1}{4}\frac{a^3}{\omega_0^2}\cos 3\tau$$

のそれぞれの解の和で書ける．$\mu = 3\omega_0$ のときに $\sqrt{(\omega_0 - \mu)^2} = 8\omega_0$ より，

$$x_1 = c\cos\tau + \frac{1}{32}\frac{a^3}{\omega_0^2}\cos 3\tau$$

$x_1(0) = 0$ より c が定まる．
つまり，$\omega = 1 - \varepsilon\frac{3}{8}a^2$

$$x(t) = a\cos(\omega t) - \frac{\varepsilon}{32}\frac{a^3}{\omega_0^2}(\cos(\omega t) - \cos 3(\omega t))$$

となる．

非線形方程式と多時間尺度法

$|\varepsilon| \ll 1$ とする．
ファン・デル・ポール（van der Pol) 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

を考察する．
$|x| \ll 1$ の時，

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon\frac{dx}{dt} + x = 0$$

，

$$x = a\mathrm{e}^{\varepsilon t/2}\cos(t + \alpha)$$

と書ける．
そこで，ε で区別される時間 $t_0, t_1, t_2, \cdots$ を導入する．

$$\frac{dt_0}{dt} = 1, \quad \frac{dt_1}{dt} = \varepsilon, \quad \frac{dt_2}{dt} = \varepsilon^2, \cdots$$

として，x の方も

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots$$

を考察する．つまり，

$$x_i = x_i(t_0, t_1, t_2, \cdots)$$

として，スケーリングする．

$$\frac{d}{dt} = \frac{dt_0}{dt}\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{dt_2}{dt}\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{dt_2}{dt}\frac{\partial}{\partial t_2}\cdots = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}\cdots,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} + \cdots,$$

$$\varepsilon^0\text{次数 } 0 : \ddot{x}_0 + x_0 = 0$$

$$\varepsilon^1\text{次数 } 1 : \ddot{x}_1 + x_1 = -2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_1} + (1 - x_0^2)\frac{\partial x_0}{\partial t_0}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_0^2}x_1 + 2\frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1}x_0 + (1 - x_0^2)\frac{\partial}{\partial t_0}x_0 + x_1 = 0\right)$$

$$\vdots : \quad \vdots$$

非線形方程式と多時間尺度法

これらを順次解けばよい．

$$x_0 = A(t_1)\cos(t_0 + \alpha(t_1))$$

として，$\varepsilon 1$ 次の右辺を計算する．$A(0) = A_0$, $\alpha(0) = 0$ とする．

$$\frac{\partial}{\partial t_0}x_0 = -A\sin(t_0+\alpha), \quad \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} - A\frac{\partial \alpha}{\partial t_1}\cos(t_0+\alpha) - \frac{\partial A}{\partial t_1}\sin(t_0+\alpha)$$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ を考えると

$$-x_0^2\frac{\partial}{\partial t_0}x_0 = A^3\sin(t_0+\alpha)\cos^2(t_0+\alpha) = A^3(\sin(t_0+\alpha) - \sin^3(t_0+\alpha)) = \frac{A^3}{4}(\sin(t_0+\alpha) - \sin(3t_0+3\alpha))$$

となる。

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + x_1 = &\left\{2\frac{\partial A(t_1)}{\partial t_1} - A(t_1)\left(1 - \frac{A^2(t_1)}{4}\right)\right\}\sin(t_0 + \alpha(t_1)) \\ &+ 2A(t_1)\frac{\partial \alpha}{\partial t_1}\cos(t_0 + \alpha(t_1)) \\ &+ \frac{A^3(t_1)}{4}\sin(3t_0 + 3\alpha(t_1))\end{aligned}$$

とある．これより，解が存在するために，

$$\begin{aligned}&2\frac{\partial A(t_1)}{\partial t_1} - A(t_1)\left(1 - \frac{A^2(t_1)}{4}\right) = 0 \\ &\frac{\partial \alpha}{\partial t_1} = 0\end{aligned}$$

これを解けばよい．

非線形方程式と多時間尺度法

$\frac{\partial \alpha}{\partial t_1} = 0$ と初期値より $\alpha(t_1) = 0$ となる．
また，

$$2\frac{dx}{dt} = x(1 - \frac{x^2}{4})$$

は，

$$dt = \frac{8dx}{(4 - x^2)x} = 2\frac{dx}{x} - \frac{dx}{x-2} - \frac{dx}{x+2}$$

より

$$t = \log\frac{x^2 - 4}{x^2} + C, \quad B\mathrm{e}^{-t} = 1 - \frac{4}{x^2}, \quad \frac{4}{x^2} = 1 - B\mathrm{e}^{-t}$$

となるため，

$$x = \frac{2}{\sqrt{1 - B\mathrm{e}^{-t}}}$$

となる．$A(0) = A_0$ より，

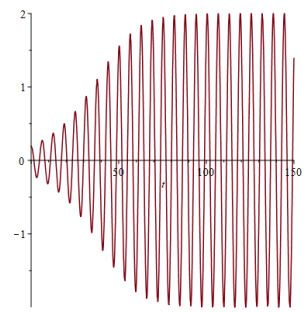
$$A = \frac{2}{\sqrt{1 + (\frac{4}{A_0^2} - 1)\mathrm{e}^{-t}}}$$

よって，$t_0 = t$, $t_1 = \varepsilon t$

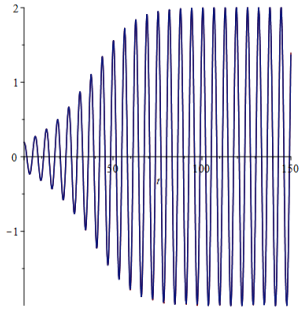
$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{A^2} - 1\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon t}}}\cos(t + \alpha)$$

これが多時間尺度の方法であるこれより，次のようなデータを得る．

非線形方程式と多時間尺度法



多時間尺度法の近似解



数値解 (ほぼ厳密解)

非線形方程式と多時間尺度法

非線形現象は一般に固有の時間スケールを持たない．それぞれの初期値によって定まる時間スケールが動的に付与される．
そのような場合も，時間スケールの分離を行うことで，線型的波動の知見を活用できる．

実際の物理現象は，多重の時間スケールを持った、極めて非線形性の強い現象であることが多い．この多時間尺度法は，概念的に活用できる．
・例，人間のある臓器の信号の機能の例として，睡眠と活動期の２４時間の時間スケールと，脈拍という心臓の振動が、少なくとも非線形に絡んでいる．

10　シンプレクティック法

調和振動子　再考

p を運動量，q を位置座標としたとき単振動のエネルギーは（適当な定数倍をすることで）

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

と記述されることが本質でした．
ハミルトンの運動方程式によると

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

となることが知られているので，今の場合

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -q$$

となる．この厳密解は

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

と書けます．このとき $M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ とすると $\det M(t) = 1$ を満たしています．
つまり，２つの初期状態 $(p_1(0), q_1(0))$ と $(p_2(0), q_2(0))$ の差分の体積

$$(p_1(0), q_1(0)) \times (p_2(0), q_2(0)) = p_1(0)q_2(0) - q_1(0)p_2(0)$$

はこの変換に対して不変である．つまり

$$(p_1(t), q_1(t)) \times (p_2(t), q_2(t)) = (p_1(0), q_1(0)) \times (p_2(0), q_2(0))$$

このような変換をシンプレクティック変換と呼ぶ．

シンプレクティック変換

一般に変換行列 $M(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$${}^tMJM = J, J \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，シンプレクティック変換と呼ぶ．
2×2 行列の場合は $\det M(t) = 1$ に一致する．

オイラー法　再考

$$q_n = q_{n-1} + \delta t p_{n-1}, \quad p_n = p_{n-1} - \delta t q_{n-1}$$

と計算した

$$\begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta t \\ -\delta t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$$

であった．これを反復すると

$$\begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta t \\ -\delta t & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

となる．他方，これを変換行列 $M_{\delta t} = \begin{pmatrix} 1 & \delta t \\ -\delta t & 1 \end{pmatrix}$ と見ると，$|M_{\delta t}| = 1 + \delta t^2$ となっている．

オイラー法　再考 II

上記を少し変更して

$$q_n = q_{n-1} + \delta t p_{n-1}, \quad p_n = p_{n-1} - \delta t q_n$$

としてみよう．

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} - \delta t q_n \\ &= p_{n-1} - \delta t(q_{n-1} + \delta t p_{n-1}) \end{aligned}$$

より，

$$p_n = (1 - \delta t^2)p_{n-1} - \delta t q_n$$

$$\begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta t \\ -\delta t & 1 - \delta t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$$

となる．このとき，変換行列 $M'_{\delta t} = \begin{pmatrix} 1 & \delta t \\ -\delta t & 1 - \delta t^2 \end{pmatrix}$ と見ると，$|M_{\delta t}| = 1$ となり，シンプレクティック変換ととなっていることが判る．
これが低次のシンプレクティック法である．
近似の精度が上がり，解が安定することが知られている．

オイラー法　再考 II

上記の方法は，非線形の場合でも対応する．

$$H = \frac{1}{2}p^2 + (1 - \cos q)$$

に対して，ハミルトンの運動方程式

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

は，今の場合

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\sin(q)$$

となる．
これに対応したオイラー法を

$$q_n = q_{n-1} + \delta t p_{n-1}, \quad p_n = p_{n-1} - \delta t \sin(q_{n-1})$$

としたものを

$$q_n = q_{n-1} + \delta t p_{n-1}, \quad p_n = p_{n-1} - \delta t \sin(q_n)$$

と置き換えると，近似の精度が上がり，解が安定することが知られている．
これが低次のシンプレクティック法である．

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double euler_x(double x, double v, double dt) {
    return x + dt * v;
}

double euler_v(double v, double x, double dt,
    double(*func)(double x)) {
    return v + dt * func(x);
}

double func1(double x) {
    return -x;
}

double Func1x(double t) {
    return cos(t);
}

double Func1v(double t) {
    return -sin(t);
}

double func2(double x) {
    return -sin(x);
}


double fabs(double x) {
    if (x < 0.0) return -x;
    return x;
}

double error(double x1, double x2) {
    return fabs(x1 - x2);
}

int main(void) {
    char name[32];
    FILE *outfp;

    double t0, t1, dt;
    double t, told;
    double x, xold;
    double v, vold;
    double xamp;
    double vamp;
    double period;
    int    it, n = 100;

    sprintf(name, "data%d.csv", 1);
    outfp = fopen(name, "w");

    t0 = 0.0;
    t1 = 6.0;
    dt = (t1 - t0) / (double)(n);
    xold = 1.0;
    vold = 0.0;
    told = t0;
    fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f¥n", t0, xold, vold,
        Func1x(told), Func1v(told),
        error(xold, Func1x(told)), error(vold, Func1v(told)));
    for (it = 0; it < n; it++) {
        x = euler_x(xold, vold, dt);
        v = euler_v(vold, xold, dt, func1);
        t = told + dt;
        fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f¥n", t, x, v,
            Func1x(t), Func1v(t),
            error(x, Func1x(t)), error(v, Func1v(t)));
        xold = x;
        vold = v;
        told = t;
    }

    fclose(outfp);
```

```
    sprintf(name, "data%d.csv", 2);
    outfp = fopen(name, "w");

    n = 2000;
    t0 = 0.0;
    t1 = 15.0;
    dt = (t1 - t0) / (double)(n);
    xamp = 2.9;
    vamp = sqrt(2 * (1 - cos(xamp)));
    period = 8.0 / 3.1415;
    xold = xamp;
    vold = 0.0;
    told = t0;
    fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f¥n", t0, xold, vold,
        xamp*Func1x(told/period), vamp*Func1v(told/period),
        error(xold, vamp*Func1x(told/period)),
        error(vold, vamp*Func1v(told/period)));
    for (it = 0; it < n; it++) {
        x = euler_x(xold, vold, dt);
        v = euler_v(vold, xold, dt, func2);
        t = told + dt;
        fprintf(outfp, "%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %1f¥n", t, x, v,
            xamp*Func1x(t/period), vamp*Func1v(t/period),
            error(x, xamp*Func1x(t/period)),
            error(v, vamp*Func1v(t/period)));
        xold = x;
        vold = v;
        told = t;
    }
    fclose(outfp); /* 終了のおまじない */
    return 0;
}
```