非線形波動概論 B

松谷茂樹

0　この授業の目標

この授業の目標

非線形波動概論 B では

1. 浅瀬の波、ソリトン
2. 非線形　カオス
3. カオスとフラクタル
4. フラクタルと ε ー δ
5. 弾性曲線の数理
6. 弾性曲線とソリトン
7. 可積分方程式

について，講義を行う．
レポート：カオスとフラクタルの箇所で，Excel 等を利用した宿題（簡単なもの）を出す．
成績については，上記の宿題と，最終的なレポート
「カオス」「フラクタル」「ソリトン」の内の 1 テーマ以上に関して各自が理解した内容のまとめ（レポート用紙 4 頁以上のレポートの提出）
により決定する．（レポートは返却しないので、残したいものはコピーを取っておくこと）
レポートに関しては（本講義の講義ノートのコピー等々は OK）（内容はもとより，判ったどうか等，見た目は重視する）．
最後に「感想」が必須

1　ソリトン（非線形可積分方程式）

線形常微分方程式

D_t を t に関して微分作用素であるとする, e.g.,

$$D_t := \left(\frac{d^3}{dt^3} - t^2\frac{d}{dt} + 3t^4\right).$$

線形微分方程式とは

$$D_t f(t) = 0$$

において，2 つの解 $f_1(t)$, $f_2(t)$ が存在した際,i.e.,

$$D_t f_a(t) = 0, \quad (a = 1, 2).$$

実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して $cf_a(t)$ も解であり，また $f_1(t) + f_2(t)$ も解であるとき, i.e.

$$D_t(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0$$

を任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して満たしているときである．
このような性質を持つとき $D_t f(t) = 0$ は線形微分方程式であるという．

線形偏微分方程式

偏微分方程式に対しても同様である．$D_{t,x}$ を t と x に関しての微分作用素であるとする, e.g.,

$$D_{t,x} := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

線形偏微分方程式とは

$$D_{t,x} f(t, x) = 0$$

において，2 つの解 $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$ が存在したとき，i.e.,

$$D_{t,x} f_a(t, x) = 0(t) = 0, \quad (a = 1, 2),$$

実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して $cf_a(t, x)$ も解であり，また $f_1(t, x) + f_2(t, x)$ も解であるとき, i.e.

$$D_{t,x}(c_1 f_1(t, x) + c_2 f_2(t, x) = 0$$

を任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して満たしているときである．

線形偏微分方程式（移流方程式）

$$D_{t,x} := \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad D_{t,x} g(t, x) = 0,$$

を考える．c は正の実数．
$\mathbb{R}$ 上一回微分可能な関数 $h(x)$ が存在したときに $g(t, x) = h(x + ct)$ は解となる．

$$D_{t,x} h(x + ct) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x + ct) = 0.$$

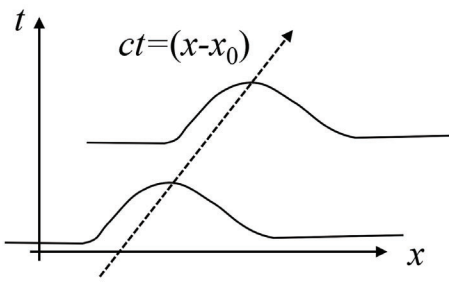
なぜならば，$x' := x + ct$ とすると

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x + ct) = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{d}{dx'} h(x')|_{x'=x+ct} = c\frac{d}{dx'} h(x')|_{x'=x+ct},$$

$$c\frac{\partial}{\partial x} h(x + ct) = c\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{d}{dx'} h(x')|_{x'=x+ct} = c\frac{d}{dx'} h(x')|_{x'=x+ct}$$

より解となる．

線形偏微分方程式（波動方程式）



線形偏微分方程式（移流方程式）

$$D^*_{t,x} := \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

とすると，$D^*_{t,x} h(x - ct) = 0.$

線形偏微分方程式（波動方程式）

$$\Delta := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$$

とすると

$$\Delta f(t,x) = 0$$

は波動方程式として知られている．

$$\Delta = D^*_{t,x} D_{t,x} = D_{t,x} D^*_{t,x}$$

である．これより，

$$\Delta f(t,x) = 0$$

は

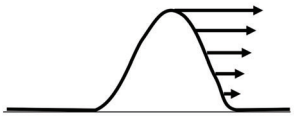
$$f(t,x) = c_1 h_1(x - ct) + c_2 h_2(x + ct)$$

という解を持つことが判る．
これらが波動の伝搬に関するものである．

非線形偏微分方程式（波動方程式）

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \right) v(x,t) = 0$$

を考える．v を波の高さとすると，これは



の図を意味する．いわゆる浅瀬の波の崩れ (北斎の絵）が起きる原理に相当する．

散逸方程式

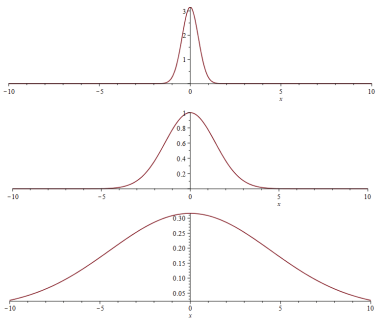
熱伝導（拡散方程式）は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x,t) = 0$$

と書かれる．この典型的な時間発展は（フーリエ変換を活用して計算でき）次のようなものとなる．が，一つの階として

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-x^2/(4t)}$$

という解を持つ



シャープだったデータ（密度・熱）がエントロピーの増大則に従って散逸してゆく様が見える．

非線形偏微分方程式（バーガーズ方程式）

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) - v(x,t) \frac{\partial}{\partial x} v(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) = 0$$

を考える．これはバーガーズ方程式と呼ばれるもので拡散方程式と関連することが知られており，波の崩れは起こらない．

KdV 方程式（非線形可積分方程式）

KdV (Korteweg-de Vries) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} v - 6v(x,t) \frac{\partial}{\partial x} v(x,t) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(x,t) = 0$$

を考える．バーガーズ方程式の散逸の項が 3 回微分に入れ替わったものである．これは

$$v(x,t) = \frac{1}{2} \lambda \frac{1}{\cosh^2\left(\sqrt{\lambda}(x - \lambda t - x_0) \right)}$$

という解を持つ．更に

$$v(x,t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau(x,t)$$

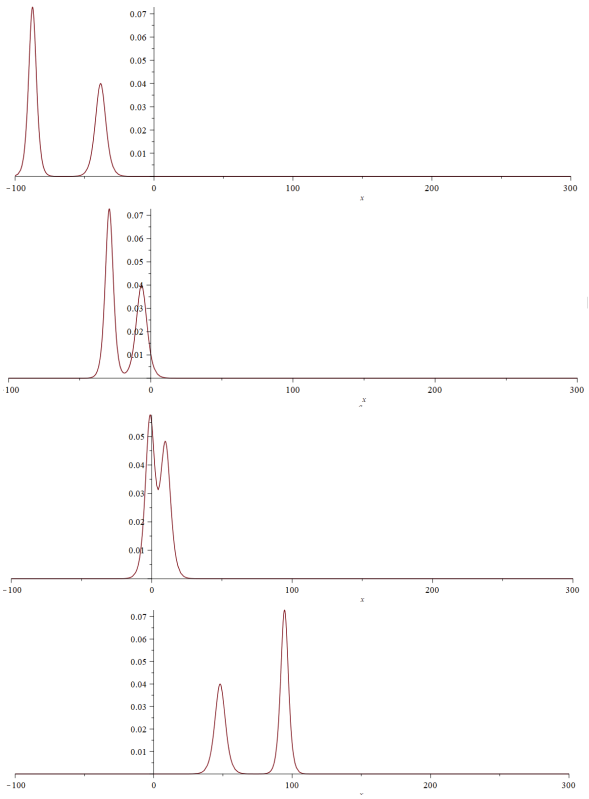
$$\tau(x,t) = 1 + A_1 \mathrm{e}^{2\theta_1} + A_2 \mathrm{e}^{2\theta_2} + \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right) A_1 A_2 \mathrm{e}^{2\theta_1 + 2\theta_2}$$

where

$$\theta_i = \kappa_i x - 4\kappa_i^3 t$$

とすると，これも解となる．

非線形方程式 (KdV 方程式の解)



非線形方程式 (KdV 方程式の解)

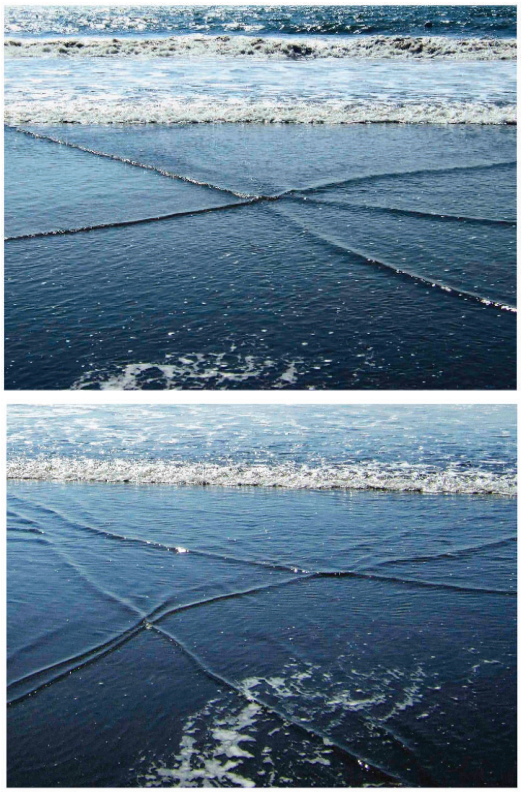
KdV 方程式は，これらの解（孤立波解 : soliton（ソリトン）解）を持つ典型的な非線形方程式である．
孤立的な波は減衰することなく伝搬し，衝突の前後で形を崩さない．

非線形方程式 (KP 方程式の解)

KdV 方程式は海の浅瀬の波を支配するものである．その一般化として知られている KP（Kadomtsev-Petviashvili）方程式

$$\partial_x(\partial_t u - 6u\partial_x u + \partial_x^3 u) + \partial_y^2 u = 0$$

を考える．これも水面波を記述する．実際、浅瀬で観測される。

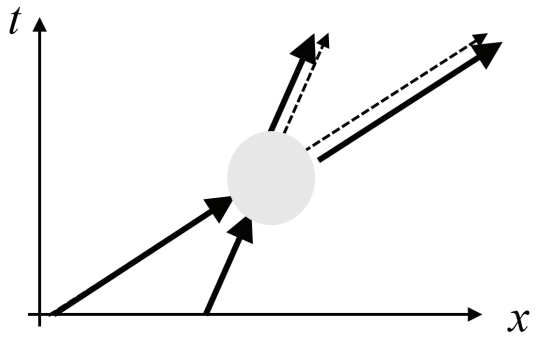


Wave patterns on a beach at Nuevo Vallarta, Mexico. Photographs by M. J. Ablowitz (S. Chakravarty1and Y. Kodama, https://arxiv.org/pdf/1309.2689.pdf)

動画が https://www.youtube.com/watch?v=WkQp0AfKeN0 にある．

非線形可積分方程式の特徴

1. 孤立波（ソリトン　soliton）は波高が高い方が速度が速い
2. 衝突の前後で形状は保存される
3. 衝突の際，波高の高いものの衝突時に位置が進行方向にズレ，波高の低いものは後方に押し出される．(非線形効果)



その他の非線形可積分方程式

このような特徴を持つモノは、光ファイバーの信号伝達に既に実用化されている．非線形シュレディンガー方程式と呼ばれるものである：

$$i\partial_t\phi + \partial_x^2\phi + |\phi|^2\phi = 0$$

また，工学やこの講義で類似のものを取り扱うのが、サイン・ゴルドン方程式

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi + \sin\phi = 0$$

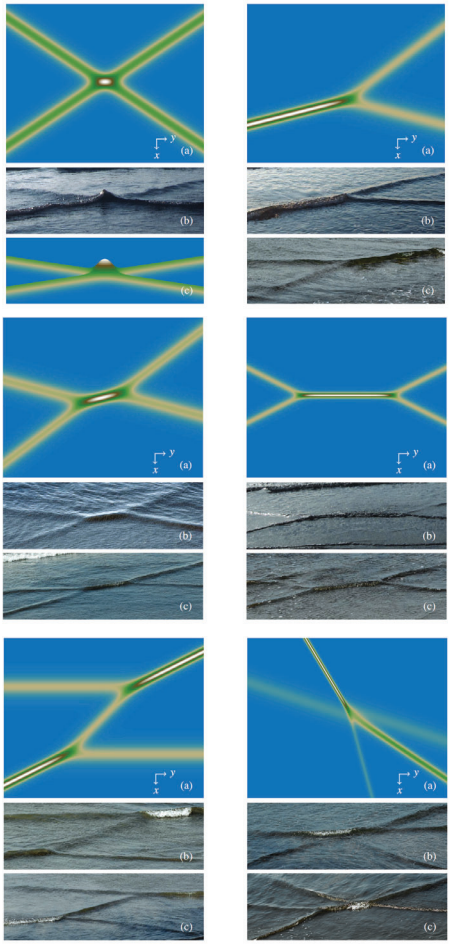
や MKdV(Modified KdV, 変形 KdV) 方程式

$$\partial_t v + 6v^2\partial_x v + \partial_x^3 v = 0$$

などが知られている．
第５回くらいから、MKdV 方程式について話をする．

KP 方程式

M. J. Ablowitz and D. E. Baldwin の解析によると https://arxiv.org/pdf/1208.2904.pdf 以下のように、実際の波形を表現することが示されている．



Kodama によって，より詳細が解析されている．

2 線形と非線形

2.1 線形方程式と線形微分方程式

多項式の集合

$\mathbb{C}[X] := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid a_i \in \mathbb{C}, n < \infty \right\}$ を複素係数の多項式全体とする．$\mathbb{C}$ を複素数全体の集合とする．

これは (無限次元) 複素ベクトル空間となる：(基（基底）は $\{1, X, X^2, X^3, \ldots\}$ である)

$$\mathbb{C}[X] \ni \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \quad \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$$

に対して，$n > m$ として，$b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_n = 0$ として

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i + \sum_{i=0}^{m} b_i X^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{C}[X]$$

と和が定義でき，$\mathbb{C}[X] \ni \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ と定数 $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$c \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = \sum_{i=0}^{n} (c a_i) X^i \in \mathbb{C}[X]$$

と定数倍が定義できるからである．

更に掛け算にも閉じている

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right) \left(\sum_{i=0}^{m} b_i X^i \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j}^{i} (a_{i-j} b_j) \right) X^{i+j}$$

多項式集合の法の計算

$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする．実係数の多項式全体，$\mathbb{R}[X] := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid a_i \in \mathbb{C}, n < \infty \right\}$ をは (無限次元) 実ベクトル空間となる：(基（基底）は $\{1, X, X^2, X^3, \ldots\}$ である)　この多項式全体において

$$X^2 = -1, \qquad X^2 + 1 = 0$$

とする関係式を導入し，C 言語の%計算と同様に X^2 が出たら，(-1) に置き換えるという操作を課す．これを

$$\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$$

と書く．このとき

$$\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) = \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

となる．この多項式間の掛け算を許すと，これは $\mathbb{C}$ と一致する．

線形微分方程式の多項式的理解

線形微分方程式とは、その解の空間が複素ベクトル空間となっているような微分方程式系の事である．

例として

$$\bigstar : \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) f = 0$$

を考える．以下簡単のために $\omega \neq 0$ とする．

線形微分方程式の多項式的理解

作用素 $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right)$ を複素係数の微分多項式全体 $\mathbb{C}\left[\frac{d}{dx}\right] := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i} \mid a_i \in \mathbb{C}, n < \infty \right\}$ の元と見る．

線形微分方程式の多項式的理解

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) = \left(\frac{d}{dx} + \sqrt{-1}\omega \right) \left(\frac{d}{dx} - \sqrt{-1}\omega \right)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) = \left(\frac{d}{dx} - \sqrt{-1}\omega \right) \left(\frac{d}{dx} + \sqrt{-1}\omega \right)$$

これより，

$$\text{☆ } 1 : \left(\frac{d}{dx} + \sqrt{-1}\omega \right) g = 0$$

$$\text{☆ } 2 : \left(\frac{d}{dx} - \sqrt{-1}\omega \right) h = 0$$

を満たす g や h は (★) の解でもある．

実際

$$\left(\frac{d}{dx} - \sqrt{-1}\omega \right) g = -2\sqrt{-1}\omega g$$

$$\left(\frac{d}{dx} + \sqrt{-1}\omega \right) h = 2\sqrt{-1}\omega h$$

より，(★) の解である事が判る．

(☆ 1)(☆ 2) の解は容易に

$$g = g_0 \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}\omega x}, \quad h = h_0 \mathrm{e}^{\sqrt{-1}\omega x}$$

である事が判る．g_0, h_0 は適当な定数である．

g, h が上記で与えられれば、その定数倍及び線形結合は (★) の解でもある．つまり，(★) の解の空間は実（複素）ベクトル空間であることが判る．つまり，

$$\Omega = \{ag + bh \mid a, b \in \mathbb{C}\}$$

となる．

線形微分方程式の多項式的理解

Ω は $\mathbb{C}\left[\frac{d}{dx}\right]$ を法 $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) = 0$ で見た空間とみなし得る．

$$\mathbb{C}\left[\frac{d}{dx}\right] \Big/ \left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) = \left\{ a1 + b\frac{d}{dx} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

このような見方は D 加群という理論体系において正当化される．ラプラス変換等で微分方程式を代数的に解く際の理論的根拠でもある．

このようなビジョン（微分作用素を基とするベクトル空間による解の構成）は、線形空間（線形代数）の抽象性によって保障されている．

これらのビジョンは，非線形方程式においても極めて有用となる．

2.2 非線形微分方程式と（非線形）方程式

非線形微分方程式の特徴

他方、非線形方程式とは，このような性質を持たないものである．
例えば

$$\triangle : \left(\frac{d^2}{dx^2} + f^2\right) f = 0$$

を考えよう．もしも，この方程式の解が二つあったとして

$$\triangle \text{ a} : \left(\frac{d^2}{dx^2} + f_a^2\right) f_a = 0, \quad (a = 1, 2)$$

となっていたとしよう．
この時，例えば $\alpha \neq 0$ の定数に対して $g = \alpha f_1$ が，

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + g^2\right) g = 0$$

となれば，g は解となり，定数倍が解となる．が，

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\alpha^2} g^2\right) g = 0$$

を満たすのであって，上記を満たさない．同様に $h = f_1 + f_2$ も解とはならない．
よって，解空間 Ω はベクトル空間ではない．このような方程式を非線形微分方程式と呼ぶ．

非線形微分方程式

ここで「非線形方程式の性質を持つ方程式というのは特殊であるか？」という疑問は自然である．
例えば、ニュートン方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(x)$$

と書かれるものを考える．２階微分方程式であるので，独立な一般解は２つあると考えるのも自然です．
ところが，そのような線形微分方程式のイメージがうまく行くのは $g(x) = ax$ のときだけである．a は定数.（もちろん，$g(x) = ax+b$ のときはその延長として非斉次方程式として，考えることができる.）
（これらは非線形波動方程式概論 A の方で取り扱う）
つまり，多くのニュートン方程式は，非線形微分方程式である．

線形微分方程式

それでは，なぜ線形微分方程式については学部等で学び，非線形微分方程式については，あまり学ばないか？
その答えは,「線形な微分方程式の問題は解ける」のに対して,「非線形微分方程式は解けない」からである．
（ただし，線形微分方程式も非常に奥深いものがある）

1. 非線形な問題を解くのに，線形微分方程式やその解をたくさん活用したりすることで，幾分か解ける場合があるため，
2. 多くの非線形問題は，固有性が強く，一般論が成立しない（共通の知識としての非線形問題という概念が難しい）

そのため，その基礎となる線形微分方程式をよく理解するということの方が学問の基礎としては有用であるため，線形微分方程式を学ぶということにある．
（もちろん，線形性を仮定した制御理論や，線形性が本質である量子力学などもその背景にはある）

（非線形）方程式

非線形性を理解するためには，

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$$

とする微分よりも，その有限バージョンである差分が重要であることがある．

$$f_n := f(\varepsilon \cdot n)$$

とする離散系を考え，そのとき，$f'(t)$ の代わりに

$$(\delta f)_n = f_n - f_{n-1}$$

を f の差分という.（それぞれをベクトル空間の基とするとこれは行列で表現できる）
このとき，非線形方程式は

$$x_n - x_{n-1} = g(x_{n-1})$$

と書かれるようなものである．
つまり，数列を取り扱うこととなる．
後で学ぶ非線形性のつよい現象では $\varepsilon \to 0$ という極限すら意味を無くす場合があり，非線形解析では，差分は重要な役割を果たす．

3　カオス

3.1　カオスとは

カオスとは

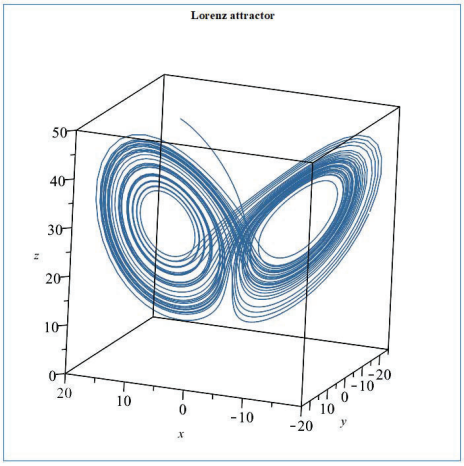
カオスとは，ラフに言って「初期値に敏感な時間発展方程式の解の振舞こと」である。
カオスの例としては、エドワード・ローレンツによる天気予報の気象モデルのローレンツ・モデル (1961) が有名である。連立非線形微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = -\sigma(X - Y), \quad \sigma = 10$$

$$\frac{dY}{dt} = -XZ + rX - Y, \quad r = 28$$

$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ \quad b = \frac{8}{3}$$

の数値計算に現れた不規則かつ初期値依存性の強い現象が始まりである。バタフライ効果（「蝶がはばたく程度の小さな攪乱が別の場所の気象に影響を与えるか?」「中国での蝶が羽ばたくとその影響で翌年の米国でのハリケーンが多発するということがあり得るか」）などの発端となった。
ローレンツは非線形微分方程式の解にストレンジ・アトラクターという現象が存在することと、パイこね変換（Baker's map（パン屋の写像）) が、ローレンツ・モデルのカオス的な振舞の本質的な役割を果たしている事などを発見した。



ローレンツ・モデルの軌道

パイコネ変換

パイこね変換とは初期値 $x_0 \in [0,1]$ に対して

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

但し，

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \le x \le \frac{1}{2}) \\ 2(1-x) & (\frac{1}{2} \le x \le 1) \end{cases}$$

とするものである．つまり，$f : [0,1] \to [0,1]$ の写像であり，$f^{(1)} := f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$ と写像の合成を表現すると

$$x_n = f^{(n)}(x_0)$$

となり，写像の繰り返しに対して初期値がどのように振る舞うかを示すものである。
関数の形から、パイをこねる際、「パイ生地を半分にして伸ばし、元の大きさにすること」を繰り返すことから名前がついた。

パイコネ変換

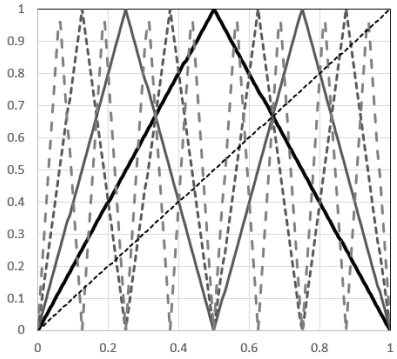


図 2-1 f, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, $f^{(4)}$ と周期点

3.2　ロジスティック方程式

ロジスティック写像 I

カオスの典型的な例として知られているロジスティックマップについて次の節で述べる．
ロジスティックマップとは

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{1}$$

によって得られる差分方程式である．但し，

$$g(x) = ax(1-x), \quad (x \in [0,1]) \tag{2}$$

パラメータ $a \in [0,4]$ と初期値としての $x_0 \in \mathbb{R}$ とに対して，逐次的に x_n が得られる．(x_{n-1} で得られるとその値に従って x_n の値が定まり，それを繰り返る.)
$3.5699456\cdots < a \le 4$ において (3.3) は**カオス**となる．

ロジスティック方程式　I

ロジスティック写像は，ロジスティック方程式を離散化することでカオスとなる例である．
そこでその基となるロジスティック方程式についてまず紹介する．
ロジスティック方程式は「：ある生態系におけるある種の個体数 N についてその時間変化を示せ」という問題に答えるために導入されたものである．
ロジスティックは logistic（兵站：へいたん，物流）から由来した言葉である．

ロジスティック方程式　II　指数関数的増加

最もシンプルなものは，その個体が現在ある個体数 N に比例してその数が増減するというものである．つまり，

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

k は定数である．
この場合，この解は $N = N_0 e^{kt}$ となる．

1. $k > 0$: N は（指数関数的に）増大する．
2. $k < 0$: N は（指数関数的に）減少する

ロジスティック方程式　III 指数関数的増加の差分化

離散化する．時間を不連続にして，dN/dt の代わりに $(N_{n+1}-N_n)/\tau$ を考えると

$$N_{n+1} - N_n = k\tau N_n$$

となる．

$$N_{n+1} = (1+k\tau)N_n = (1+k\tau)^2 N_{n-1} = \cdots = (1+k\tau)^n N_0$$

となる．（感染症の問題とした際に，$(1+k\tau)$ は実効再生産数と呼ばれるものでもある．）

1. $k>0$: $(1+k\tau)>1$: N は（指数関数的に，ネズミ算的に）増大する．
2. $k<0$: $(1+k\tau)<1$: N は（指数関数的に）減少する

（$\tau = t/n$ として $n\to 0$ とすると，連続の解を再現する．講義 A）

$$(1+k\tau)^n = (1+k(t/n))^{kt/(k(t/n)} \to e^{kt}$$

ロジスティック方程式　IV ロジスティック方程式

この指数関数的増加モデルに、個体数が増えることによる障害により，個体数の増加割合が減少する現象を組み込む．最もシンプルなものは

$$k = \alpha(1-\beta N), \quad (\alpha,\beta>0)$$

である．このとき，上記微分方程式は

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(1-\beta N)$$

となる．これをロジスティック (logistic) 方程式という．

これは非線形方程式であるが，$\frac{1}{N^2}\frac{dN}{dt} = \alpha\left(\frac{1}{N}-\beta\right)$ と変形でき，これより

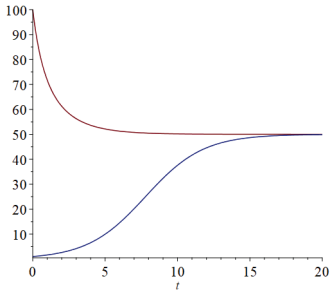
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{N}-\beta\right) = -\alpha\left(\frac{1}{N}-\beta\right)$$

とでき，$\left(\frac{1}{N}-\beta\right) = \left(\frac{1}{N_0}-\beta\right)e^{-\alpha t}$ より

$$N = \frac{1}{\beta + \left(\frac{1}{N_0}-\beta\right)e^{-\alpha t}}$$

となる．

ロジスティック方程式　解の例



$\alpha = 0.5, \beta = 0.02, N_0 = 1, 100$

ロジスティック方程式　VI ロジスティック方程式の差分化

この式は変形に従って，

$$\left(\frac{1}{N_{n+1}}-\beta\right) - \left(\frac{1}{N_n}-\beta\right) = -\alpha\tau\left(\frac{1}{N_n}-\beta\right)$$

つまり，

$$N_{n+1} - N_n = \alpha\tau N_{n+1}(1-\beta N_n)$$

と差分化すると，元の解析解を再現する．他方，

$$N_{n+1} - N_n = \alpha\tau N_n(1-\beta N_n)$$

とするとロジスティック写像と呼ばれるカオス的に振る舞いの方程式となる．

3.3　ロジスティック写像

ロジスティック写像 I

カオスの典型的な例として知られているロジスティック写像に戻る：

$$x_{n+1} = g(x_n) == ax_n(1-x_n),$$

パラメータ $a\in[0,4]$ $3.5699456\cdots < a \le 4$ において (3.3) は**カオス**となる．

ロジスティック写像 II

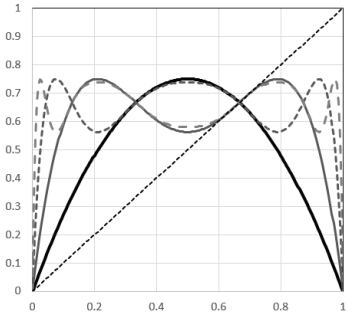


図 2-2 $a=3$: g, $g^{(2)}$, $g^{(3)}$, $g^{(4)}$ と周期点

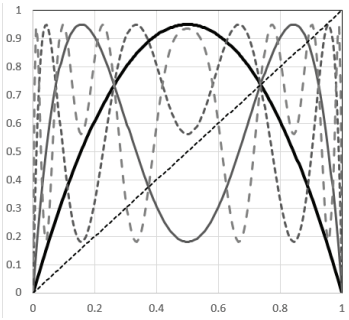


図 2-3 $a=3.8$: g, $g^{(2)}$, $g^{(3)}$, $g^{(4)}$ と周期点

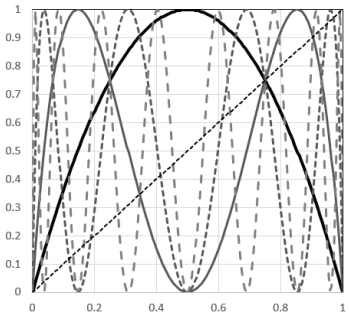


図 2-4 $a=4$: g, $g^{(2)}$, $g^{(3)}$, $g^{(4)}$ と周期点

ロジスティック写像 III

$3.5699456\cdots < a \leq 4$ において $x_n = c$ と $x_n = c + \varepsilon$ と微小な値の差がその後の時間発展において，全く異なる振る舞いをすることとなる．
例えば，$a < 1$ の場合は，$x_n \to 0$ となることが容易に判る。漸近的な値は a の値によって定まる場合がある。このような漸近挙動をしめしたものが次の図である．

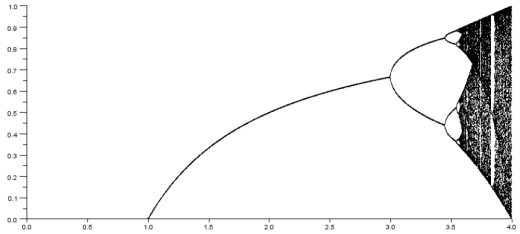


図 2-5 (Wikipedia より)

ロジスティック写像 IV

ある初期値からの時間発展は図 2-6 のようになる．カオスはランダムネスと混同されがちですが，図に示されるように非常に整然として見える．
例えば，図 2-6 で x_n の値が 0.08 を下回る時間ステップの間隔は，大きく外れている部分もあるが，ほぼ一定の 10 前後に見える．

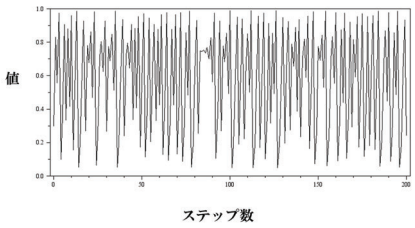


図 2-6 x_n の振る舞い

ロジスティック写像のフーリエ解析

そこでオーソドックスな時系列な信号解析であるスペクトル P_ℓ，

$$\{P_\ell := |\hat{x}_\ell|^2\}_{\ell=1,\ldots,N/2}, \quad \hat{x}_\ell := \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{2\pi\sqrt{-1}n\ell/N}$$

を考え，その対数 $\log P_n$ の動きを眺める．つまり，離散フーリエ変換を考える．$N = 200$ の場合の図 2-7(a) では，$200/8 = 25$ にピークが見えるが，これは非線型な現象なので，$N = 10000$ である図 2-7(b) の場合はそのようなピークが消える．「f 分の 1」理論で知られているように $\log P = f^{-1.5}$ に漸近している．(特徴的なスケールが存在しないことを意味している．)

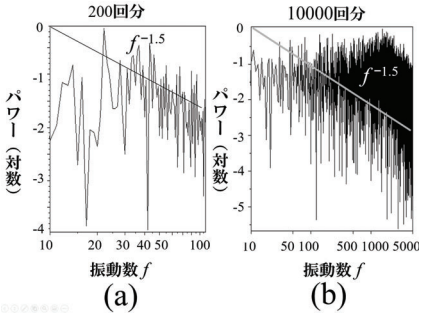


図 2-7 パワーと振動数

ロジスティック写像

他方，統計的な手法である 0.08 以下になった後に再度 0.08 以下になるまでのステップ数間隔の頻度をまとめたものが図 2-8 である．確かに戻ってく回数に規則性があることが分かりる．この事は，基本的にはポアンカレが研究した**回帰時間の定理**により保障されている．図 2-7 はどのくらい確率で戻ってくるかの予想まで可能にする．

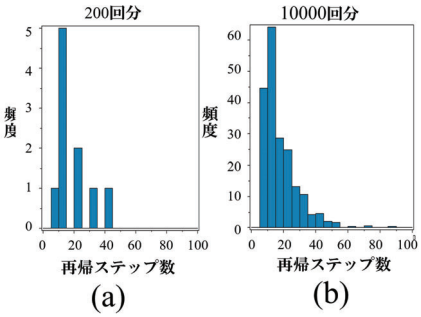


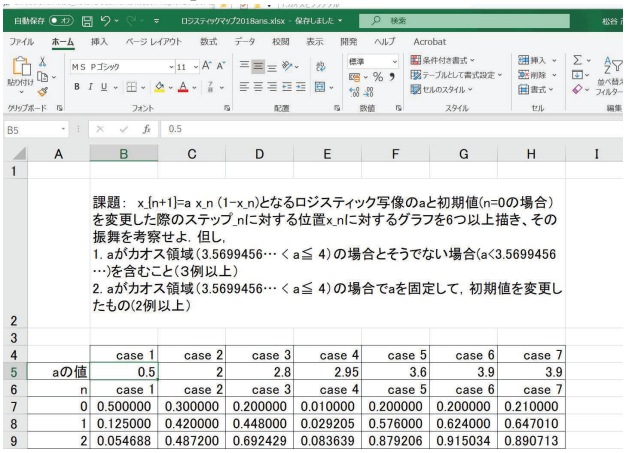
図 2-8　回帰時間の頻度

注意

非線形現象を取り扱う際には，非線形現象に対応した解析方法を選択すべきである．
なんでも FFT をすればよいという考え方では $1/f$ とかのボンヤリとした解析しかできない．
例えば，カオス現象に対しても，カオス現象の特徴をうまく活用することで，**カオス制御**という手法も実用化されている．

ロジスティック写像　Home Work I

`http://smatsutani.jp/Lecture.html` の「ロジスティックマップ　エクセルファイル」をダウンロードし



課題：　x_{n+1}=a x_n (1−x_n)となるロジスティック写像のaと初期値(n=0の場合)を変更した際のステップ_nに対する位置x_nに対するグラフを6つ以上描き、その振舞を考察せよ．但し，
1. aがカオス領域（3.5699456⋯ < a≦ 4）の場合とそうでない場合(a<3.5699456⋯)を含むこと(3例以上)
2. aがカオス領域（3.5699456⋯ < a≦ 4）の場合でaを固定して，初期値を変更したもの(2例以上)

		case 1	case 2	case 3	case 4	case 5	case 6	case 7
5	aの値	0.5	2	2.8	2.95	3.6	3.9	3.9
6	n	case 1	case 2	case 3	case 4	case 5	case 6	case 7
7	0	0.500000	0.300000	0.200000	0.010000	0.200000	0.200000	0.210000
8	1	0.125000	0.420000	0.448000	0.029205	0.576000	0.624000	0.647010
9	2	0.054688	0.487200	0.692429	0.083639	0.879206	0.915034	0.890713

に従い，x_{n+1}=a x_n (1-x_n) となるロジスティック写像の a と初期値を変更した際のステップ n に対する位置（軌道）x_n を 4 つ以上計算し，その振る舞いを考察する共にロジスティック写像の性質，また、カオスの特徴をまとめ，それらを基に，計算結果について論ぜよ．

4　フラクタル

$\varepsilon-\delta$ 記法

数学的な事実を自然現象に適用する際の注意をする．これは $\varepsilon-\delta$ に関わるものである．$\varepsilon-\delta$ 記法とは，例えば，高校数学で通常

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

と書くところを厳密に
「任意の $\varepsilon>0$ に対して『$|x-a|<\delta$ となる x であれば $|f(x)-b|<\varepsilon$』を満たす $\delta>0$ が存在する」
と記すものである．「ε という解像度で眺めて δ という基準の存在を問う」と読める．

コッホ曲線

フラクタルで有名なコッホ曲線を見る．

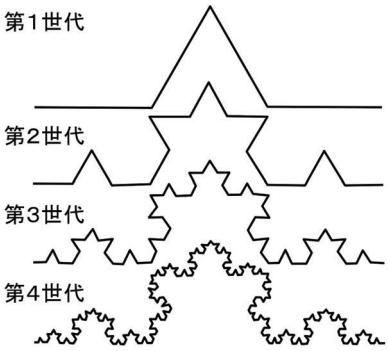


図 3-1

コッホ曲線は図 3-1 の上から下に 1 世代，2 世代と，自然に定義される規則に従って，図を変形しておいて，その極限として定義されるものである
このような図形を**フラクタル**と呼ぶ．長さは世代毎に 4/3 倍するためので，コッホ曲線は無限の長さを持つ．

フラクタルとは

フラクタルは IBM にも在籍していた経済学者ブノワ・マンデルブロが導入した概念である．
入れ子状の相似形図に対して、フラクタルという命名をしたものであるが，厳密な定義をすることは難しいものである．数学的に取り扱う際には、限定した範囲で，再帰性と類似性が両立する定義を用いるが，工学的，応用数学的には，それより広範囲な定義を採用することが多い．
従って，コッホ曲線に類似したものという直観的理解が最も望ましい．
フラクタル図形は，雲，山林，杉の木などのように，1 次元（曲線）のみならず，2 次元（曲面）や，3 次元（体積的なもの）に対して同様に定まる．

リアス式海岸

他方，以下の図のようなリアス式海岸は近似的にフラクタルの一種であるという事が知られている．海岸線のこのような性質はマンデルブロによってはじめに研究され，フラクタルという概念を構築したきっかけとなったものである．
ズームインしてもズームアウトしてもよく似たギザギザの海岸線が見える．

リアス式海岸の地図

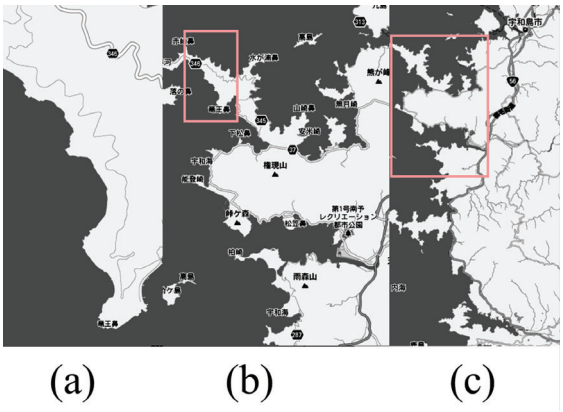


図 3-2(google map より)

リアス式海岸と道路

前の図に描かれているように，リアス式海岸に沿って道路を通す事を考えよう．リアス式海岸がコッホ曲線と同様ならば，無限の長さが必要と思うかもしれないが，実際は異なる．
高速道路ならば，1Km 単位で曲がる事はできないし，日常使う道路ならば数 m 程度以下で曲がりくねる事は実用上考えらない．遊歩道ではどうだろうか．
用途に応じた解像度で対象を眺め直して，対応するフラクタルの有限の世代を選び，その世代に応じた道を通すことに対応する．これは上記の $\varepsilon-\delta$ と同じ話である．
数学には長さ等の単位はない，特徴的長さも内在しない．ある仮に与えた解像度 ε に対して，それを実現する別の解像度 δ(今の場合，世代 N) の存在を問うのみである．自然現象等に数学の定理を適用する際には，現象が内在する特徴的長さの精度で**数学的な事実を解釈し直すという作業が必要となる．**そのためのツールが $\varepsilon-\delta$ だと考えることができる．

Home Work II

以下の 1 と 2 をまとめよ．
1．フラクタル図形の特徴を挙げ，フラクタル図形に類似した工学的現象，あるいは自然現象を挙げ、フラクタル性について論ぜよ．
２．Google マップで道路のある適当なリアス式海岸を見つけ，そのズームイン，ズームアウトをすることでその形状と，そこを通る高速道路，国道，県道，生活道路，遊歩道などと，どのような関係にあるかを考察せよ．(ズームイン・ズームアウトした地図は３枚以上，画面コピーで提出のこと)
可能ならば，この時，$\epsilon-\delta$ 論法との対応を論ぜよ。

4.1　フラクタル次元

フラクタル次元

フラクタル次元というものを聞くことがある．フラクタルが厳密に定義できないので，実際にはハルスドロフ次元の事を示す．これの概念的な説明を行い，実用上の計算方法を示す．

フラクタル次元

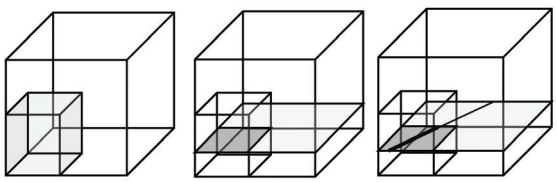


図 B-1

フラクタル次元

まず、解析的な次元について述べる．解析的とは，積分をした結果（体積、面積、長さ）に関することについてである．
図 B-1 のように，1 辺 L の立方体を考える．このときこの立方体の体積 $V_1 = L^3$ として与えられる．次にこのサイズを $1/n$ 倍にした場合を考える．そうすると辺は L/n となり，その体積 V_2 は $V_2 = L^3/n^3$ となる．ここで、解析的な次元 d を

$$d = \log_n \frac{V_1}{V_2}$$

と定義する．このとき，立方体の場合は $n = 2$, $n = 3$ でも

$$d = \log_2 \frac{L^3}{L^3/2^3} = \log_3 \frac{L^3}{L^3/3^3} = 3$$

となる．この次元は直方体でも（球でも）同じ結果になることに注意する．
同様に立方体に埋め込まれた正方形の場合を考える．正方形の元の面積 A_1 は $A_1 = L^2$ であり、n 分の一にした場合は $A_2 = L^2/n^2$ である．よって解析的次元

$$d = \log_n \frac{A_1}{A_2} = 2$$

となる．直線の場合は

$$d = \log_n \frac{L}{L/n} = 1$$

となり、それぞれの次元と対応する．
ここで、コッホ曲線を考える．コッホ曲線の長さは無限ではあるがそれを ℓ と置く．コッホ曲線のサイズ 1/3 倍すると $\ell/4$ となることが判る．よって，その解析的次元は

$$d = \log_3 \frac{\ell}{\ell/4} = \log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26186\cdots$$

となる非整数の値となる．これをフラクタル次元と呼ぶ．

画像処理によるフラクタル次元の計算方法

画像処理によるフラクタル次元の計算方法（ボックス・カウント法）を紹介する．
画像サイズを $2^N \times 2^N$ から $2^{N-1} \times 2^{N-1}$ に小さくすることを考える．
$2^N \times 2^N$ のサイズでの対象とする図形（曲線）の画素数を M_N とする．これを

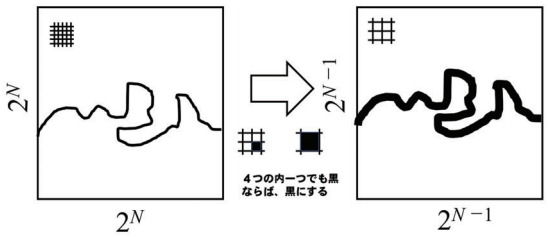


図 B-2

画像処理によるフラクタル次元の計算方法

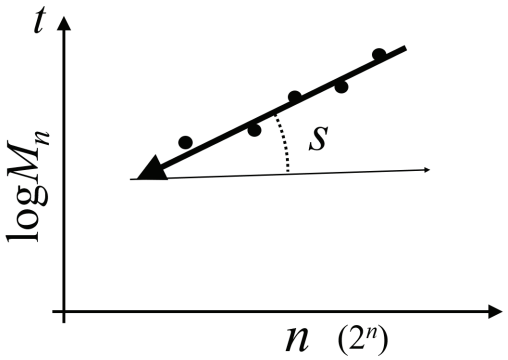
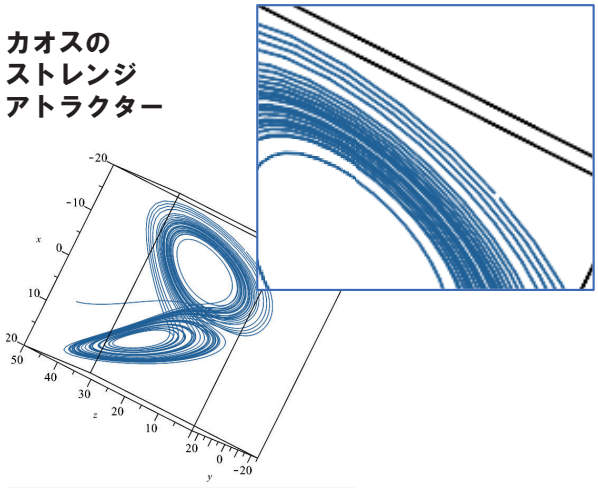


図 B-3

このとき，上記の傾き s が（ボックスカウント法による）フラクタル次元と呼ぶ．

フラクタルの例

カオスの
ストレンジ
アトラクター

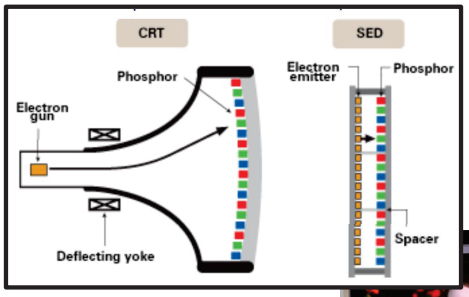


野菜のロマネスコ

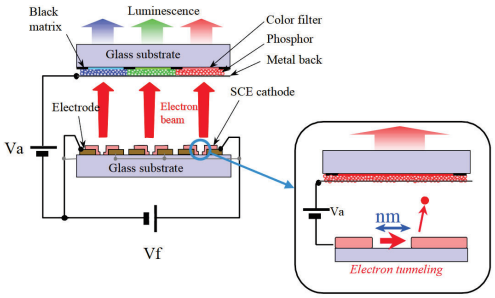
野菜のカリフラワー

雲

「SED」(Surface-conduction Electron-emitter Display)



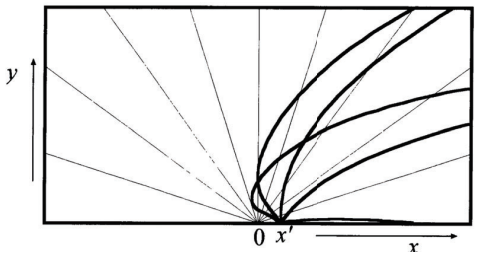
CEATECなどで公開された55インチのSED

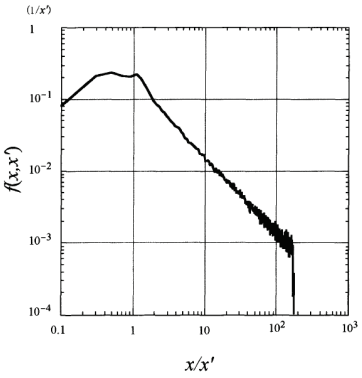


$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad for \quad z > 0,$$

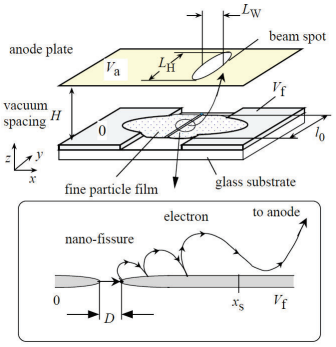
$$E_w = -\frac{i\nu}{\pi}\frac{1}{w}, \qquad w = x + iz$$

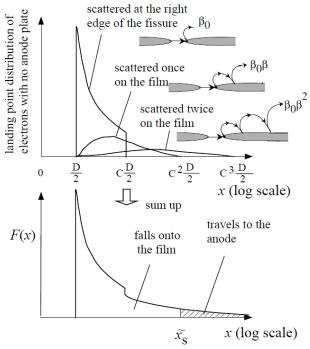
$$E_w = E_x - iE_z$$

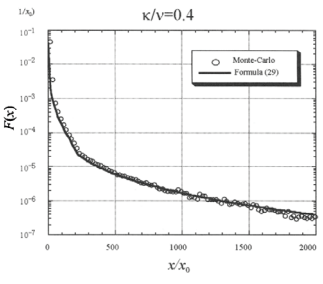


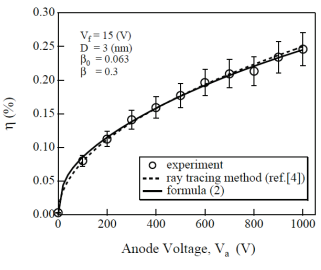


$$f(x,x')\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{\gamma+\delta}\theta(\xi'+1-\xi)\mathrm{d}\xi, & \text{for } \xi \geq \xi' \\ \dfrac{\delta\gamma}{\gamma+\delta}g(x_0C^{\xi}, x_0C^{\xi'})x_0C^{\xi}\mathrm{d}\xi, & \text{for } \xi < \xi' \end{cases}$$









パーコレーションの電気伝導
と
フラクタル

1

パーコレーションとは

パーコレーションとは浸透：
- 山火事の延焼（伝搬）
- 伝染病の感染広がり（伝搬）
- 多孔質媒体への液体のしみこみ
- ランダム媒質の電気伝導

を表現する統計学、統計力学の数理モデルである

Fields賞：
Wendelin Werner　2006年
Stanislav Smirnov　2010年
Schramm-Lawner-evolution（SLE）
- Oded Schramm (1961-2008)
- Lawner: ビーベルバッハ予想

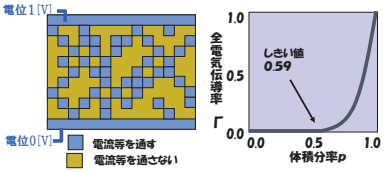
Robert Langlands, John Cardy

2

パーコレーションの種類

格子パーコレーション（電気伝導の場合）

ランダム配置された伝導体■での電気伝導



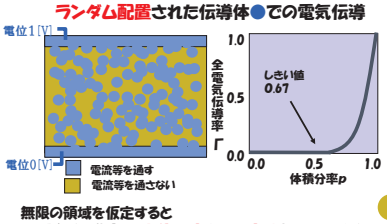
無限の領域を仮定すると
全電気伝導率は体積分率（■の密度）のみに依存

3

パーコレーションの種類

連続パーコレーション（電気伝導の場合）

ランダム配置された伝導体●での電気伝導

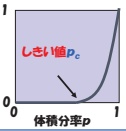


無限の領域を仮定すると
全電気伝導率は体積分率（●の密度）のみに依存

4

パーコレーションの性質

- 次元によって大きく異なる
- しきい値p_c以下では流れない
- しきい値p_c以上では流れる
- 全伝導率（抵抗）は桁で変わる



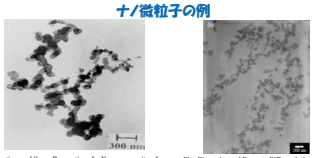
$$\sigma = (p - p_c)^t \Rightarrow R = \frac{1}{(p - p_c)^t} \text{ より}$$

$p \geq p_c$
$t > 0$
$p \sim p_c$で$R \to \infty$

5

対象とするもの：

絶縁体の中のランダムに配置された電気伝導微粒子
ナノ微粒子の例



Preparation and Some Properties of a Nanocomposite of Polyacrylonitrile with Acetylene Black. Arjun Maity and Mukul Biswas Polymer Journal, Vol. 36 (2004) No. 10 pp.812-816

Fine Dispersion and Property Differentiation of Nanoscale Silicate Platelets and Spheres in Epoxy Nanocomposites Chow-Chin Chu, Jiang-Jen Lin, Chong-Ru Shiu and Chang-Chin Kwan Polymer Journal, Vol. 37 (2005) No. 4 pp.239-247

実際の物質：
「電流が流れない＝抵抗が非常に大きい」
「電流が流れる　＝抵抗が金属レベル」

全体での電気伝導率（電気抵抗）をパーコレーションを利用して制御する。

6

パーコレーションの電気伝導で判りたいこと
（ものづくりの観点から）

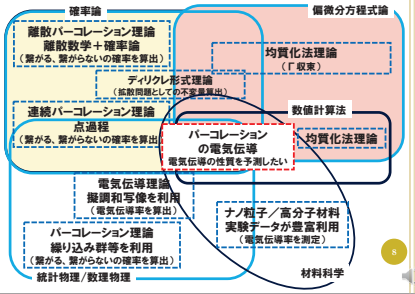
ケルビン：「測定（数値化）できれば、科学になる」（1889）　⇒ 予測でき、制御可能となる

パーコレーションの電気伝導で判りたいこと
伝導微粒子を含有した材料の抵抗にどのようなパラメータが効いているのか？
- ○形は電気伝導にどのように影響するのか？
- ○凝集は電気伝導にどのように影響するのか？
- ○電位分布の特徴は？

⇒ 大小関係などの傾向でよいので定量化したい。

7

パーコレーション理論を取り巻く分野



8

モンテカルロ法＋数値解析（差分法）で電気伝導率を計算する！

差分法では精度がでない

例：2次元の連続パーコレーションの円形：
- しきい値p_c= 0.6763475(6)（従来手法）
- しきい値p_c= 0.66±0.02　（差分法）

⇒絶対精度はアカデミックレベルではないが、
パラメータの依存性は知る事ができる！

- ○形は電気伝導にどのように影響するのか？
- ○凝集は電気伝導にどのように影響するのか？
- ○電位分布の特徴は？

9

モンテカルロ計算による
連続パーコレーションの差分法での
電気伝導率の計算

10

モンテカルロ計算における
連続パーコレーションの電位決定問題

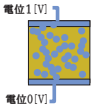
疑似乱数を利用して粒子の配位Xを一様乱数で決定！
Xは、疑似乱数の種i_Sと体積分率pの関数

$$X = X(i_S, p) \subset B$$

$$:= \left\{ z \in \cup(D_j \cap B) \;\middle|\; \begin{array}{l} D_j\text{:j番目の円盤、} \\ \text{中心位置を乱数で決定} \\ \text{vol}(\cup D_j) = p\text{, 種は}i_S \end{array} \right\}$$

円盤の半径は一定にするモデル

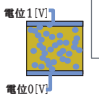
B：領域



11

p=0.01

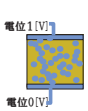
$X(i_S, 0.01)$



12

p=0.20

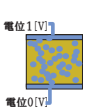
$X(i_S, 0.20)$



13

p=0.50

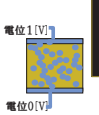
$X(i_S, 0.50)$



14

p=1.00

$X(i_S, 1.00)$



15

モンテカルロ計算における
連続パーコレーションの電位決定問題

疑似乱数を利用して粒子の配位Xを一様乱数で決定！
Xは、疑似乱数の種i_Sと体積分率pの関数

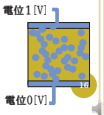
$$X = X(i_S, p) \subset B$$

$$:= \left\{ z \in \cup(D_j \cap B) \;\middle|\; \begin{array}{l} D_j\text{:j番目の円盤、} \\ \text{中心位置を乱数で決定} \\ \text{vol}(\cup D_j) = p\text{, 種は}i_S \end{array} \right\}$$

$X(i_S, p) \subset X(i_S, p'), \quad p < p'$

自然なフィルター構造（包含関係）がある
（FKG不等式に関連するもの）

Path空間としても表現できる

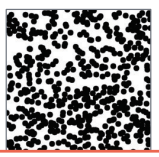


16

問題：
2次元の電気伝導率分布のある
一般化ラプラス方程式

$$\Delta_\gamma f = \text{div}(\gamma \cdot \text{grad } f) = 0$$

を解く！



$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1 = 1 & x \in X\text{：伝導体} \\ \gamma_0 = \varepsilon \ll 1 & otherwise \end{cases}$$

17

問題：

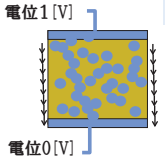
3次元の電気伝導率分布のある一般化ラプラス方程式

$$\text{div}(\gamma \cdot \text{grad } u) = 0$$

を解く！

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 & x \in X\text{=伝導体} \\ \varepsilon \ll 1 & otherwise \end{cases}$$

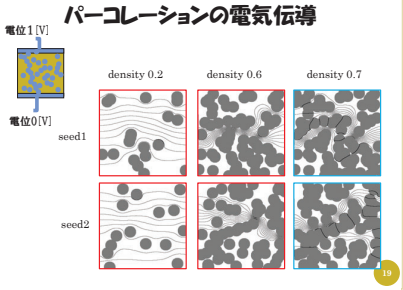
Bimaterial（2元物質）のために超関数の意味では微分方程式がB全域で定義されている。



境界値問題
（ディリクレ・ノイマン問題）
を解く

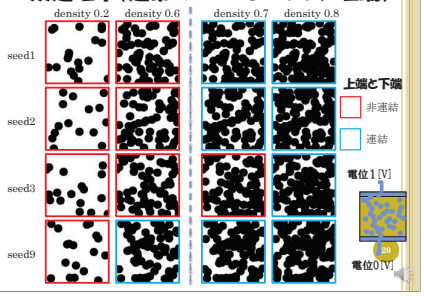
18

パーコレーションの電気伝導



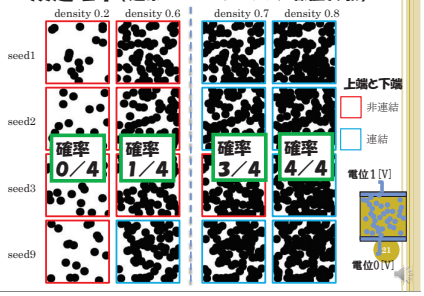
19

浸透確率(通常のパーコレーション理論)



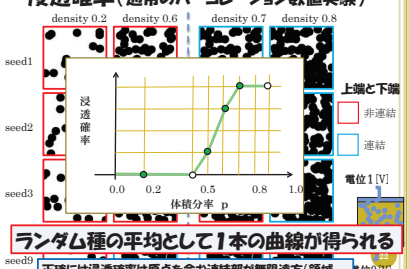
20

浸透確率(通常のパーコレーション数値実験)



21

浸透確率(通常のパーコレーション数値実験)

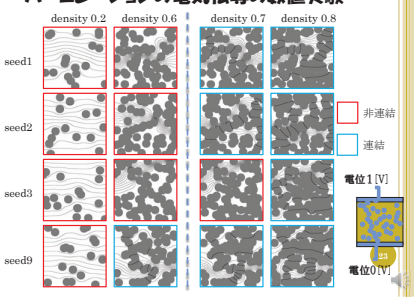


ランダム種の平均として1本の曲線が得られる

正確には浸透確率は原点を含む連結部が無限遠方(領域外)まで繋がっている確率

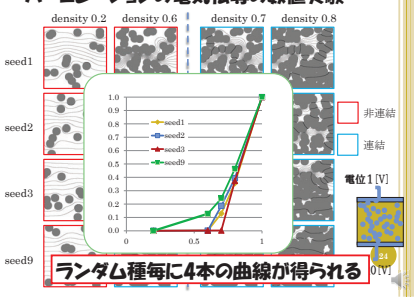
22

パーコレーションの電気伝導の数値実験



23

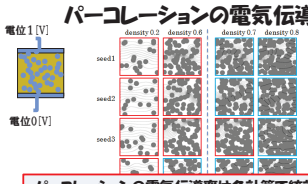
パーコレーションの電気伝導の数値実験



ランダム種毎に4本の曲線が得られる

24

パーコレーションの電気伝導



・パーコレーションの電気伝導率は各計算で統計平均が取られている。
・ある種の無限の大きさの極限で電気伝導率は統計平均と一致する。 ← エルゴード性

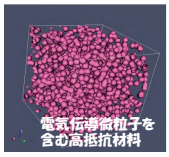
25

問題:

3次元の電気伝導率分布のある一般化ラプラス方程式

$$\Delta \sigma f = \mathrm{div}(\sigma \cdot \mathrm{grad}\, f) = 0$$

を解く!

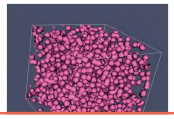


問題:

3次元の電気伝導率分布のある一般化ラプラス方程式

$$\Delta \sigma f = \mathrm{div}(\sigma \cdot \mathrm{grad}\, f) = 0$$

を解く!



$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x \in \\ \varepsilon \ll 1 & otherwise \end{cases}$$

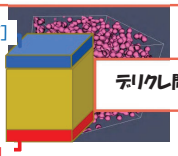
46

3次元の電気伝導率分布のある一般化ラプラス方程式

$$\Delta \sigma f = \mathrm{div}(\sigma \cdot \mathrm{grad}\, f) = 0$$

を解く!

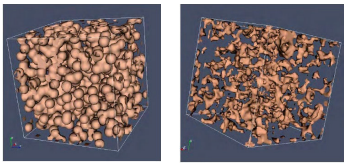
電位1[V]



ディリクレ問題を解く

電位0[V]

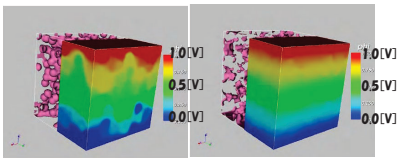
47



30% 90%

電気伝導微粒子の体積分率

電位分布



30% 90%

密度が異なると振る舞いが異なる

○形は電気伝導にどのように影響するのか?

○凝集は電気伝導にどのように影響するのか?

○電位分布の特徴は?

⋮

50

○形は電気伝導にどのように影響するのか?

○凝集は電気伝導にどのように影響するのか?

○電位分布の特徴は?

⋮

76

2次元上の円盤形状に対する連続パーコレーションモデル

●伝導微粒子

重なりを許す一様ランダムの円盤の伝導微粒子(半径は一定)をばら撒いた際

1. 上下に電極をつけて、電圧を印加した際、電位分布はどのようになるか?
2. ディリクレ・ノイマン境界として $\mathrm{div}(\gamma \cdot \mathrm{grad}\, u) = 0$ 解はどのように振舞うか?

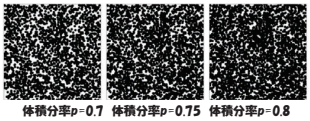
Matsutani, Shimosako, Wang
Physica A 391 (2012) 5802-5809
Fractal Structure of Equipotential Curves on a Continuum Percolation Model

33

2次元上の円盤形状に対する連続パーコレーションモデル

微粒子分布 $p_c = 0.67$

体積分率p=0.5 体積分率p=0.6 体積分率p=0.65

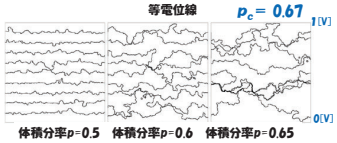


体積分率p=0.7 体積分率p=0.75 体積分率p=0.8

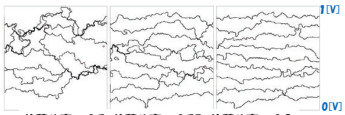
34

等電位線

$p_c = 0.67$



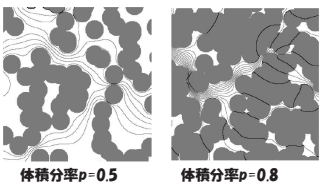
体積分率p=0.5 体積分率p=0.6 体積分率p=0.65



体積分率p=0.7 体積分率p=0.75 体積分率p=0.8

35

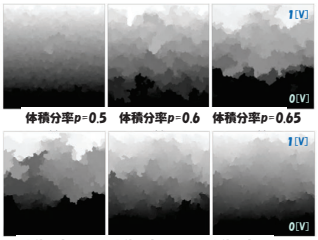
等電位線(拡大図)



体積分率p=0.5 体積分率p=0.8

36

電位分布 $p_c = 0.67$

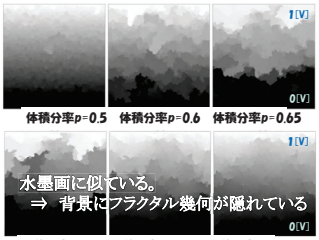


体積分率p=0.5　体積分率p=0.6　体積分率p=0.65

体積分率p=0.7　体積分率p=0.75　体積分率p=0.8

37

電位分布 $p_c = 0.67$



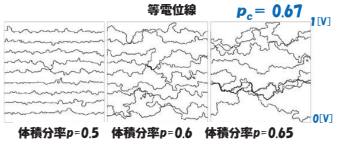
体積分率p=0.5　体積分率p=0.6　体積分率p=0.65

水墨画に似ている。
⇒ 背景にフラクタル幾何が隠れている

体積分率p=0.7　体積分率p=0.75　体積分率p=0.8

38

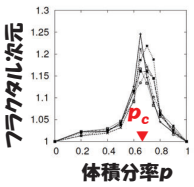
等電位線 $p_c = 0.67$



体積分率p=0.5　体積分率p=0.6　体積分率p=0.65

体積分率p=0.7　体積分率p=0.75　体積分率p=0.8

39



電位分布の特徴は ？

●p_cの近傍で、電位分布はフラクタル的になる。

40

Matsutani, Shimosako, Wang, arXiv:1107.2983

まとめ

1960年代～1990年中ばで、一度研究のピークが終了したパーコレーションの電気伝導に関して、

ナノテクノロジーの材料の制御にむけて、2000年代の計算機科学の発展のお陰で、興味深い数学的事実が得られた。

1. 凝集状態や微粒子形状と抵抗との関係が判ってきた。

2. ポテンシャル分布がフラクタル形状に関係している事が判ってきた。

⇒ 擬等角写像と点過程（統計学）との関連により
系とフラクタル幾何との関係が見えてきている。

5 弾性曲線とループソリトン

5.1 弾性曲線

弾性曲線の歴史

Jacob Bernoulli は 1791 年に懸垂曲線の次の問題として「平面上のピアノ線の形状を数学的に表現し，分類せよ」という弾性曲線 (elastica) 問題を提示した．これは，レオナルド・ダ・ヴィンチの梁のスケッチなどにもみられる，建造物の梁の形状の設計という応用科学的な課題端を発するものである．
この Jacob から始まる弾性曲線 (elastica) の研究は，Daniel Bernoulli, Euler に引き継がれ，終結する．その過程において，Jacob は Lemuniscate 積分を発見し，Daniel は最小原理を発見した．Euler はそれに従い，変分法，楕円積分，楕円曲線の実モデュライの研究を行った．そして，数値計算により，平面上のピアノ線のすべての形状を楕円積分の求積により表現し，分類を完成させた．

初等微分幾何：平面曲線

平面内の曲線がパラメータ s により $Z(s)=X(s)+\sqrt{-1}Y(s)$ と表示されているとする。その際、平面内の弧長とは平面上の自然な計量で計った弧の長さの事である。パラメータ s が弧長となる条件は、$\partial_s := d/ds$ と略記して、

$$|\partial_s Z| = 1 \tag{1}$$

となることである。$\partial_s Z$ は接ベクトルであり、接角 ϕ を利用して、$\mathbf{t} := \partial_s Z = \mathrm{e}^{\sqrt{-1}\phi}$、$\mathbf{n} := \sqrt{-1}\mathbf{t}$ と記す。このとき、

$$\mathbf{t} := \partial_s Z, \quad \partial_s \mathbf{t} = k\mathbf{n}, \quad \partial_s \mathbf{n} = -k\mathbf{t} \tag{2}$$

と書ける（図 1 参照）。$k := \partial_s \phi$ を曲率 (曲率半径の逆数) と呼ぶ。

弾性曲線のエネルギー

$$\mathcal{E} = \int ds k^2 \tag{3}$$

曲線の等長変形

曲線 $Z(s)$ の微小変化を

$$Z' = Z + (U_1\mathbf{t} + U_2\mathbf{n})\delta t \tag{4}$$

と記す。ここで、δt は現実の時間ではなく、仮想的な変形のパラメータである。しかし、あえて、t をある種の仮想時間と理解すると (U_1, U_2) が速度のように振舞う。つまり、$(Z'-Z)/\delta t$ を $\partial Z/\partial t$ であると考え、

$$\partial_t Z = (U_1 + \sqrt{-1}U_2)\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\phi} \tag{5}$$

とする。長さを変えない変形とは、変形のパラメータ t が $[\partial_t, \partial_s] = 0$ という性質をもつ変形のことである。但し、$[A, B] \equiv AB - BA$ とする。
ここで、$[\partial_t, \partial_s]Z = 0$ を計算すると実部分と虚数部分より

$$\partial_t \phi = \partial_s U_2 + kU_1, \quad 0 = \partial_s U_1 - kU_2 \tag{6}$$

を得る。第 1 式を s でもう一度微分して、第 2 式の U_2 を代入することで

$$\partial_t k = \partial_s (k + \partial_s k^{-1} \partial_s) U_1 \tag{7}$$

を得る。ここで $\partial_s \partial_t \phi = \partial_t \partial_s \phi \equiv \partial_t k$ を用いた。つまり、局所長さを変えない変形は関係式 (7) を必ず満たさなければならないことがわかる。上記は以下ともかける．

$$\partial_t k = \partial_s (\partial_s + k\partial_s^{-1} k) U_2 \tag{8}$$

曲線の等長変形下でのエネルギー最小化問題

その条件下でエネルギー汎関数 (3) の変分を考えると

$$-\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta U_1(s)} = \partial_s(k^2) + 2\partial_s \frac{\partial_s^2 k}{k} = 0 \tag{9}$$

を得る。s について積分し k を掛けると

$$ak + \frac{1}{2}k^3 + \partial_s^2 k = 0 \tag{10}$$

となる。これがソリトン理論でよく知られた MKdV 方程式の特殊な場合である。
式 (10) に $(\partial_s k)$ 掛けたものをもう一度積分し、実定数 a, b を用いて、

$$(\partial_s k)^2 + \frac{1}{4}k^4 + ak^2 + 4b = 0 \tag{11}$$

を得る。

曲線の等長変形下でのエネルギー最小化問題の解

$(k, \partial_s k)$ を (ξ, η) 平面の点に対応させることで、式 (11) は曲線

$$C_1' \ : \ \xi^2 = -\frac{1}{4}\eta^4 - a\eta^2 - 4b \tag{12}$$

に対応しているが判る。この曲線が楕円曲線である。

線形偏微分方程式（波動方程式)

ここで次の図の各 Class の個別の形状について少し述べておこう。馴染み深いと思われるところから始める。

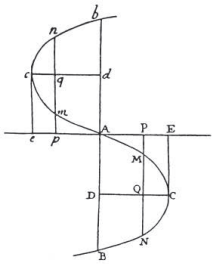
1. Class 4 や Class 7 は、紙テープや絨毯、電源コードを扱っているときに出会う形状である。もちろん、実際の形状は太さやねじれの効果等々が大きく影響を及ぼすのであるが、局所的にはよい近似になっている。楕円関数や楕円積分が日常的な形として現れるのはそれらの自然さに起因している。

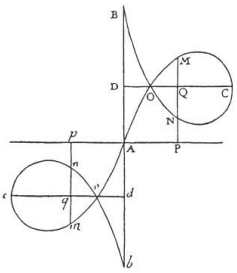
2. 次に、エラスティカが非線形現象で重要な概念である分岐や対称性の破れと通じている例として Class 2 を眺めよう。Class 2 はプラスチックの下敷きを上下に押すとできる形状である。押し方によって図のように節が 3 つできたり、 2 つのみだったりするし、左や右に膨らんだものになったりする。エラスティカは対称性の破れや分岐といった現象でもよい原型にもなっているのである。

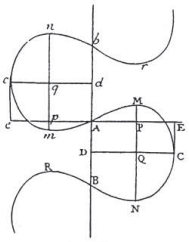
3. ソリトン理論との関係としては、Class 7 について述べねばならない。Class 7 は 1979 年に紺野、市川、和達によって、ループソリトンとして再発見された形状である。その後、次の図の各形状が、ループソリトンの楕円関数解に相当することが判っている。ループソリトンは後で述べるエラスティカの統計力学模型に深く関係する。エラスティカが 200 年を経たソリトン方程式の原型たることはその問題の深さを物語っている。

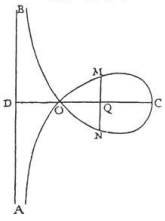
4. Class 5 は不思議な 8 の字形状をしている。これは後で述べるレムニスケイトとも関係する。Class 5 の形状を実際に実現するためには、Class 9 の円を一回ねじる事でできる。例えば、ピアノ線の端を巧くつなぎ合わせて円形にしておいてねじればよい。では、更にもう一度ねじるとどうなるであろうか？
　もちろん、実際の弦ではこの分類表に存在しない形が現れる。他方、そうした曲線をエラスティカと思い、式 (3) のエネルギーが最小になるように変形してゆくと円に戻る。つまり、エラスティカに Class 5 と Class 9 の二種類以外に閉じた形状は存在しない。その理由のひとつとしては 2 次元面におけるねじれが正負しかないということにある。実際、Class 5 の法線ベクトルを弧に沿って動かすと片側の閉曲線では内向きであったのがもう片側では外向きになっている。それらは位相幾何的な情報と見ることもできる。

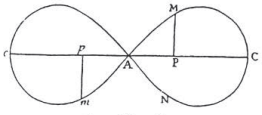
オイラーの解

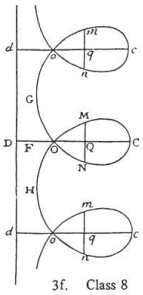

3a. Class 2


3d. Class 6


3b. Class 4

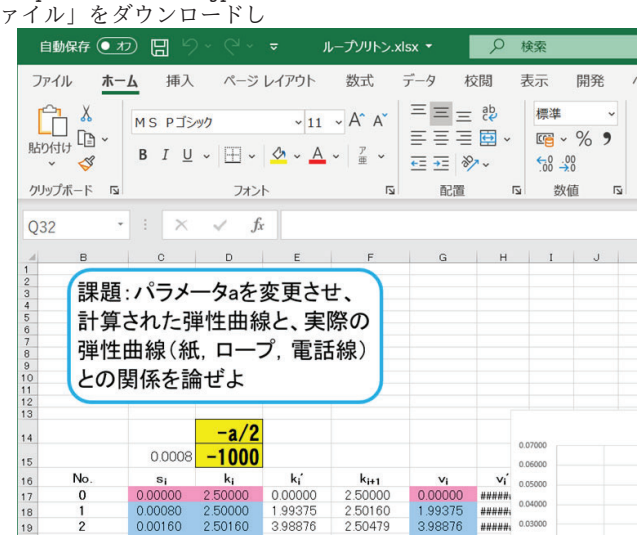

3e. Class 7


3c. Class 5


3f. Class 8

Home Work III

http://smatsutani.jp/Lecture.html の「弾性曲線　エクセルファイル」をダウンロードし



を活用して，パラメータを変更することで，オイラーが導出した形状を数値計算により解き，その形状を示すと共に，弾性曲線の形状について考察せよ．

ループソリトン

$$ak + \frac{1}{2}k^3 + \partial_s^2 k = 0$$

を $v = \frac{1}{2}k$ とすると

$$a'v_s + 6v^2 v_s + v_{sss} = 0$$

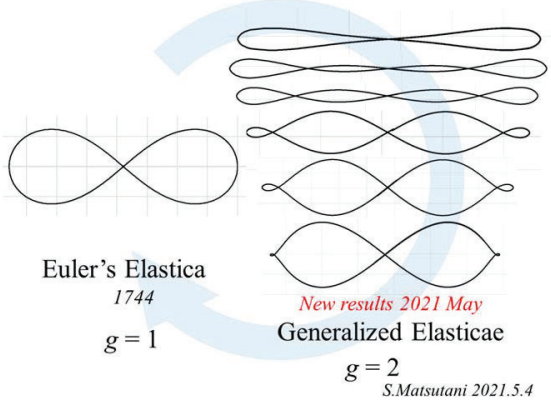
と書ける．これを定常解と見なして，

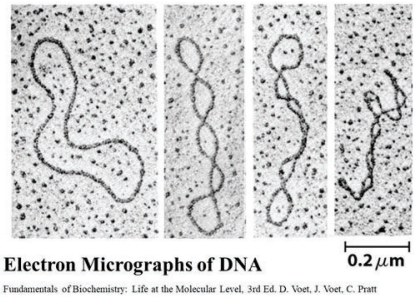
$$v_t + 6v^2 v_s + v_{sss} = 0$$

と置き直したものが変形 KdV 方程式である．これは

$$\partial_t k = \partial_s(\partial_s + k\partial_s^{-1}k)\partial_s k$$

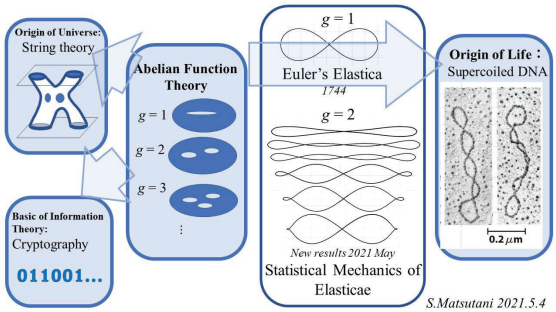
とも書ける．
この解は，オイラーの形状の他に次のような解を持ち DNA の超らせん形状などと関係する．





ソリトン方程式とリーマン面

ソリトン方程式の解は、代数曲線という幾何学的構造と関係をしており、それらは暗号理論（楕円暗号／超楕円暗号）とも、また、宇宙の起源と関わるストリング理論などとも関わる深いものがある．



5.2 ループソリトン解

MKdV 方程式の特殊解の導出 I

ソリトン方程式の特殊解の導出に関しては広田の方法というものが知られている．
それについて紹介する．

MKdV 方程式の特殊解の導出 I: log による変換

ここでは v を求める MKdV 方程式の解とし，$(-\infty,\infty)$ 上で定義されているとする．フェーズ ϕ を次のように定義する．

$$v(s,t) =: \frac{1}{2}\partial_s\phi$$

また，ϕ は次のような関数形をしていると仮定する：

$$\begin{aligned}\phi &= 4\tan^{-1}\frac{f}{g} = -2\mathrm{i}\log\frac{f+\mathrm{i}g}{f-\mathrm{i}g}\\ &= -2\mathrm{i}\log\frac{\tau_+}{\tau_-}\end{aligned}$$

ただし，

$$\tau_\pm := f \pm \mathrm{i}g.$$

MKdV 方程式の特殊解の導出 II: 広田　双一次微分作用素

$$\partial_s\phi(s,t) = \left(\frac{\partial_s\tau_+}{\tau_+} - \frac{\partial_s\tau_-}{\tau_-}\right) = \frac{\tau_-\partial_s\tau_+ - \tau_+\partial_s\tau_-}{\tau_+\tau_-}$$

$$\partial_t\phi(s,t) = \left(\frac{\partial_t\tau_+}{\tau_+} - \frac{\partial_t\tau_-}{\tau_-}\right) = \frac{\tau_-\partial_t\tau_+ - \tau_+\partial_t\tau_-}{\tau_+\tau_-}$$

広田の双一次微分作用素を

$$\mathbf{D}_s a\cdot b = \mathbf{D}_s(a\cdot b) = a(\overleftarrow{\partial}_s - \overrightarrow{\partial}_s)b.$$

とすると，

$$\partial_t\phi(s,t) = \frac{\mathbf{D}_t(\tau_+\cdot\tau_-)}{\tau_+\tau_-}$$

$$\partial_s\phi(s,t) = \frac{\mathbf{D}_s(\tau_+\cdot\tau_-)}{\tau_+\tau_-}$$

となる．
また，

$$\partial_s^2\phi(s,t) = \frac{(\tau_+\partial_t\tau_-)^2 - (\partial_t\tau_+\tau_-)^2}{(\tau_+\tau_-)^2} - \frac{\tau_+\partial_s^2\tau_- - \partial_s^2\tau_+\tau_-}{\tau_+\tau_-}$$

$$\partial_s^3\phi(s,t) = -\frac{\tau_+\partial_s^3\tau_- - \partial_s^3\tau_+\tau_-}{\tau_+\tau_-} + 3\frac{\tau_+^2\partial_s^2\tau_-\partial_s\tau_- - \partial_s^2\tau_+\partial_s\tau_+\tau_-^2}{(\tau_+\tau_-)^2}$$
$$-2\frac{(\tau_+\partial_s\tau_-)^3 - (\partial_s\tau_+\tau_-)^3}{(\tau_+\tau_-)^3}$$

となる．これらも広田微分で記述できる．

MKdV 方程式の特殊解の導出 I

この時，MKdV 方程式は，一回積分することで

$$\partial_t\phi + (\partial_s\phi)^3 + 2\partial_s^3\phi = 0$$

となる．よって，

$$\frac{\mathbf{D}_t(\tau_+\cdot\tau_-)}{\tau_+\tau_-} + \frac{\mathbf{D}_s^3(\tau_+\cdot\tau_-)}{\tau_+\tau_-} - 3\left(\frac{\mathbf{D}_s^2(\tau_+\cdot\tau_-)}{\tau_+\tau_-}\right)\left(\frac{\mathbf{D}_s(\tau_+\cdot\tau_-)}{\tau_+\tau_-}\right) = 0. \tag{13}$$

と書かれる．
この解を不定値 $\tilde{\lambda}$ により

$$(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_s^3)(\tau_+\cdot\tau_-) = 3\tilde{\lambda}\mathbf{D}_s(\tau_+\cdot\tau_-),$$

と置くと

$$(\mathbf{D}_s^2)\tau_+\cdot\tau_- = \tilde{\lambda}\tau_+\tau_-.$$

となる．
もしも，$\tilde{\lambda}$ がゼロであるならば，(13) は

$$(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_s^3)\tau_+\cdot\tau_- = 0,$$

$$(\mathbf{D}_s^2)\tau_+\cdot\tau_- = 0.$$

となる．
τ が両式を満たすとき，ソリトン解という解になることが知られている．
これが広田の方法である．

MKdV 方程式の特殊解の導出 I

これらは，

$$2\mathrm{i}\partial_s v = \partial_s^2\log\tau_+ - \partial_s^2\log\tau_-$$

と書ける．
MKdV の解に対して

$$u_\pm = \partial_s^2\log\tau_\pm$$

とすると，これはミウラ変換と呼ばれる変換に対応し，それぞれが、KdV 方程式に対応する広田の方程式

$$\mathbf{D}_s(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_s^3)\tau_\pm\cdot\tau_\pm = 0.$$

を満たすことが知られている．

MKdV 方程式の特殊解の導出 I

ジェネリックなパラメータ ϵ を導入して $\tau_\pm$ を ϵ について形式的な ϵ の展開とする．

$$\tau_\pm(t,s,\epsilon) := 1+\tau_\pm^{(1)}(t,s)\epsilon+\tau_\pm^{(2)}(t,s)\epsilon^2+\tau_\pm^{(3)}(t,s)\epsilon^3+\tau_\pm^{(4)}(t,s)\epsilon^4+\cdots.$$

各パラメータを比較することで ϵ, 双一次な関係式を得る：

$$\begin{aligned}
\epsilon &: \mathbf{D}_s(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_s^3)(\tau_\pm^{(1)}\cdot 1 + 1\cdot\tau_\pm^{(1)}) = 0\\
\epsilon^2 &: \mathbf{D}_s(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_s^3)(\tau_\pm^{(2)}\cdot 1 + \tau_\pm^{(1)}\cdot\tau_\pm^{(1)} + 1\cdot\tau_\pm^{(2)}) = 0\\
\epsilon^3 &: \mathbf{D}_s(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_s^3)(\tau_\pm^{(3)}\cdot 1 + \tau_\pm^{(2)}\cdot\tau_\pm^{(1)} + \tau_\pm^{(1)}\cdot\tau_\pm^{(2)} + 1\cdot\tau_\pm^{(3)}) = 0\\
&\cdots\cdots.
\end{aligned}$$

第一の式が線形なために、解を得ることができる：

$$\tau_\pm^{(1)} = \sum_i^N \exp(K_i s - K_i^3 t + \delta_\pm^{(i)}).$$

次に 2 番目の式を考察する $\tau_\pm^{(1)}$ は一番目で定まるため $\tau_\pm^{(1)}$ を使って，$\tau_\pm^{(2)}$ が定まる．
このようにして $\tau_\pm$ 達が定まる．

MKdV の特殊解の導出　正整数 N の場合

$$\tau_{\pm} = f \pm \mathrm{i}g,$$

$$f(s,t) = \sum_{n=0}^{[N/2]} \sum_{{}_NC_{2n}} a(i_1, i_2, i_3, \cdots, i_{2n}) \exp(\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \cdots + \xi_{i_{2n}}),$$

かつ, $g(s,t) =$

$$\sum_{n=0}^{[(N-1)/2]} \sum_{{}_NC_{2n+1}} a(i_1, \cdots, i_{2n+1}) \exp(\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \cdots + \xi_{i_{2n+1}}),$$

$$\begin{aligned} a(i_1, i_2, i_3, \cdots, i_n) &= \prod_{k<l}^{(n)} a(i_k, i_l) \quad \text{for} \quad n \geq 2 \\ &= 1, \qquad \text{for} \quad n = 0, 1 \end{aligned}$$

$$a(i_k, i_l) = -\frac{(K_{i_k} - K_{i_l})^2}{(K_{i_k} + K_{i_l})^2}$$

$$\xi_i := K_i s - K_i^3 t + \delta_i, \quad \delta_i \in \mathbb{C}$$

但し $[x]$ はガウス括弧（x を超えない最大の整数).

MKdV 方程式の特殊解の導出　$N = 2$

$N = 2$ の時を考える：

$$\tau_{\pm}^{(2)} = a_{12} \exp(\sum_{i}^{N} (K_i s - K_i^3 t + \delta_{\pm}^{(i)})),$$

ただし，

$$a(1,2) = a_{12} = \frac{(K_1 - K_2)^2}{(K_1 + K_2)^2},$$

とすると ϵ^3 の項は消え，収束することが判る．
つまり τ は

$$\begin{aligned} \tau_{\pm} = 1 &+ \exp(K_1 s - K_1^3 t + \delta_{\pm}^{(1)}) + \exp(K_2 s - K_2^3 t + \delta_{\pm}^{(2)}) \\ &+ a_{12} \exp(K_1 s - K_1^3 t + \delta_{\pm}^{(1)} + K_2 s - K_2^3 t + \delta_{\pm}^{(2)}). \end{aligned}$$

となる．
$\tau_{\pm}$ の関係を見ることで

$$\delta_{\pm} = \pm \mathrm{i}\pi/2$$

が定まる．

$$\begin{aligned} f &= 1 + a_{12} \exp(K_1 s - K_1^3 t + K_2 s - K_2^3 t) \\ g &= \exp(K_1 s - K_1^3 t + \delta_{\pm}^{(1)}) + \exp(K_2 s - K_2^3 t + \delta_{\pm}^{(2)}). \end{aligned}$$

ループソリトンの特殊解の導出　$N = 2$

$$dX_1 + i dX_2 = \mathrm{e}^{i\phi(s,t)} ds = \left(\frac{f - ig}{f + ig}\right)^2 ds$$

に対して，

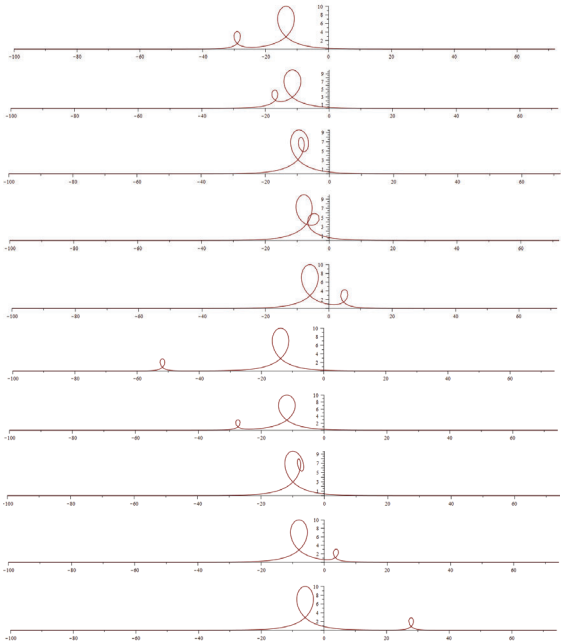
$$X_1 = s - 4 \frac{\dfrac{\chi_1^2}{K_1} + \dfrac{\chi_2^2}{K_2} + \dfrac{4\chi_1\chi_2}{K_1 + K_2} + \dfrac{(K_1 + K_2)\alpha}{K_1 K_2} \chi_1^2 \chi_2^2}{(\chi_1 + \chi_2)^2 + (1 + \alpha\chi_1\chi_2)^2}$$

$X_2/4 =$

$$\frac{\dfrac{\chi_1^2}{K_1} + \dfrac{\chi_2^2}{K_2} + 4\alpha\chi_1\chi_2 \left(\dfrac{\chi_1}{K_2} + \dfrac{\chi_2}{K_1}\right) K_1 + K_2 + \dfrac{(K_1 + K_2)\alpha}{K_1 K_2} \chi_1^2 \chi_2^2}{(\chi_1 + \chi_2)^2 + (1 + \alpha\chi_1\chi_2)^2}$$

但し $\chi_a := \mathrm{e}^{\xi_a} = \exp(K_a s - K_a^3 t),$, $\alpha := a_{1,2}$

ループソリトンの特殊解　$N = 2$

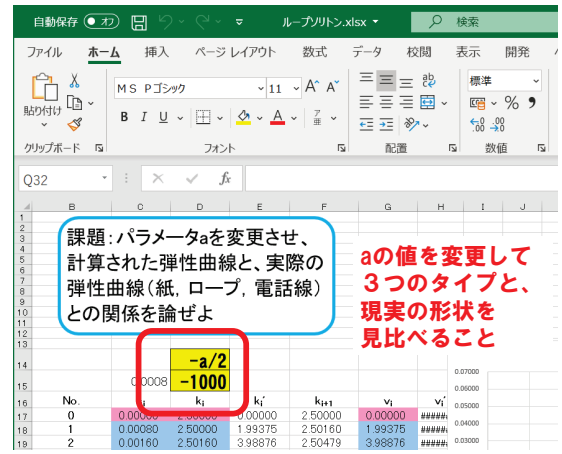


弾性曲線の計算方法

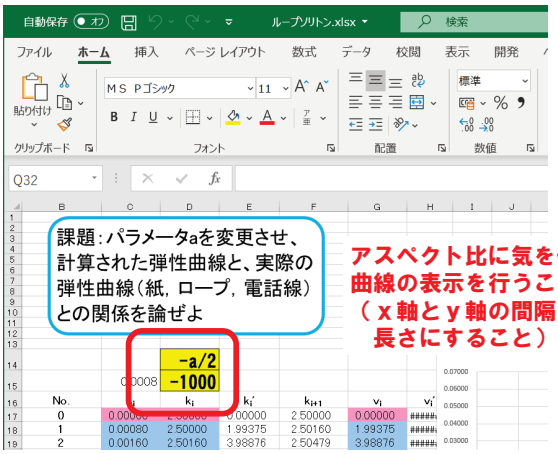
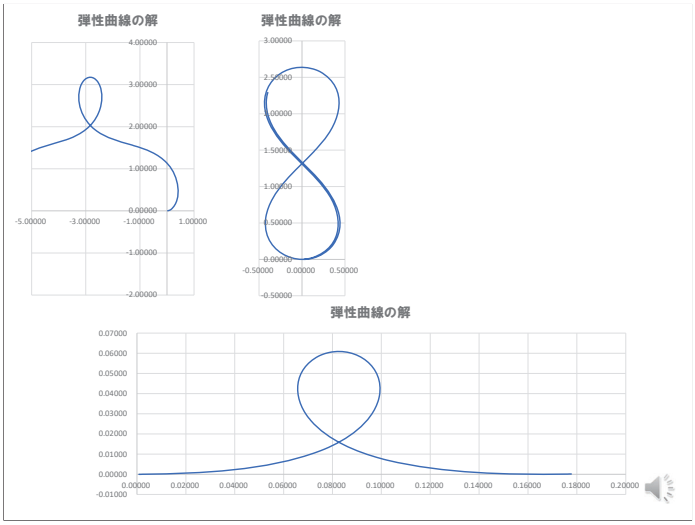
$$k^3 + 2\partial_s^2 k + ak = 0$$

Case I: a<0:
Case II: 0<a<4:
CaseIII: 4<a:

3つのタイプに分類される



aの値を変更して３つのタイプと、現実の形状を見比べること



アスペクト比に気を付けて曲線の表示を行うこと（ｘ軸とｙ軸の間隔を同じ長さにすること）